



**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVI-a, 25 martie 2023**

Clasa a V-a

Problema 1

Știind că $a+b=53$, $b+c=75$ și $c+d=88$, calculați câtul și restul împărțirii numărului $a+4b+5c+2d$ la $a+d$.

Problema 2

Determinați numerele naturale x și y știind că $y^2 + y = 6^x + 3905$.

Problema 3

Demonstrați că, oricum am alege trei numere diferite de forma 7^n , unde n este număr natural nenul oarecare, există două dintre acestea cu proprietatea că fie suma, fie diferența lor este un multiplu de 50.

Gazeta Matematică

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 2 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



**CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVI-a, 25 martie 2023**

Clasa a V-a

Barem de evaluare și notare

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

Problema 1

Știind că $a + b = 53$, $b + c = 75$ și $c + d = 88$, calculați câtul și restul împărțirii numărului $a + 4b + 5c + 2d$ la $a + d$.

Soluție

$$a + b = 53$$

$$b + c = 75 \quad | \cdot 3 \Rightarrow 3b + 3c = 225 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$c + d = 88 \quad | \cdot 2 \Rightarrow 2c + 2d = 176 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

Prin adunarea celor 3 egalități se obține:

$$a + 4b + 5c + 2d = 454 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

Prin adunarea egalităților $a + b = 53$ și $c + d = 88$ se obține $a + b + c + d = 141$2 p

$$\Rightarrow a + d = 141 - 75 = 66 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

Finalizare: câtul este 6 și restul este 58.....1 p

Oficiu.....1p

Problema 2

Determinați numerele naturale x și y știind că $y^2 + y = 6^x + 3905$.

Soluție

$$y(y + 1) = 6^x + 3905 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$y(y + 1) - 3905 = 6^x \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Cum y și $y + 1$ sunt numere consecutive $\Rightarrow y(y + 1)$ este număr par.....2 p

$$\Rightarrow y(y + 1) - 3905 \text{ este număr impar} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\Rightarrow 6^x \text{ este impar} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$



$$\Rightarrow x = 0 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Prin înlocuire se obține } y(y + 1) = 3906 \Rightarrow y = 62 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

Oficiu.....1p

Problema 3

Demonstrați că, oricum am alege trei numere diferite de forma 7^n , unde n este număr natural nenul oarecare, există două dintre acestea cu proprietatea că fie suma, fie diferența lor este un multiplu de 50

Gazeta Matematică

Soluție

Numărul natural n poate avea una din formele $n = 4k, n = 4k + 1, n = 4k + 2, n = 4k + 3$

unde k este număr natural.1p

$$7^{4k} = 49^{2k} = (50 - 1)^{2k} = M_{50} + 1 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$7^{4k+1} = (M_{50} + 1) \cdot 7 = M_{50} + 7 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$7^{4k+2} = (M_{50} + 1) \cdot 49 = M_{50} + 49 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$7^{4k+3} = (M_{50} + 1) \cdot 343 = M_{50} + 343 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Cazul 1

Dacă cel puțin două puteri au exponentul n de aceeași formă, diferența lor este

$$7^{4k} - 7^{4p} = (M_{50} + 1) - (M_{50} + 1) = M_{50} + 1 - M_{50} - 1 = M_{50}$$

$$7^{4k+1} - 7^{4p+1} = (M_{50} + 7) - (M_{50} + 7) = M_{50} + 7 - M_{50} - 7 = M_{50}$$

$$7^{4k+2} - 7^{4p+2} = (M_{50} + 49) - (M_{50} + 49) = M_{50} + 49 - M_{50} - 49 = M_{50}$$

$$7^{4k+3} - 7^{4p+3} = (M_{50} + 343) - (M_{50} + 343) = M_{50} + 343 - M_{50} - 343 = M_{50} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

Cazul 2

Dacă exponenții celor trei puteri au forme diferite, atunci numerele alese au trei din formele

$7^{4k}, 7^{4p+1}, 7^{4q+2}, 7^{4r+3}$ și există două a căror sumă este multiplu de 50

$$7^{4k} + 7^{4q+2} = M_{50} + 1 + M_{50} + 49 = M_{50} + 50 = M_{50} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

sau

$$7^{4p+1} + 7^{4q+3} = M_{50} + 7 + M_{50} + 343 = M_{50} + 350 = M_{50} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Oficiu.....1p





**CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVI-a, 25 martie 2023**

Clasa a VI-a

Problema 1.

- a) Să se determine numerele prime a și b pentru care $2023 + a = (9b)^2$.
- b) Există numere naturale x și y pentru care $2023^{4x} = y^2 + 2023$? Justificați!

Problema 2.

- a) Arătați că pentru orice numere naturale nenule n și k are loc relația: $\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$.
- b) Arătați că $\frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2023} < \frac{1}{3}$.
- c) Fie $N = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{2021 \cdot 2023}$. Arătați că numărul $\frac{7077}{N}$ este pătrat perfect.

Problema 3.

Fie triunghiul ascuțitunghic ABC , iar M mijlocul laturii AB . Pe prelungirea lui MC se consideră punctul D astfel încât $C \in (MD)$. Dacă $\sphericalangle AMC = 60^\circ$ și $AB = 2CD$, demonstrați că $BC = AD$.

Gazeta Matematică

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 2 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



**CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVI-a, 25 martie 2023**

**Clasa a VI-a
Barem de evaluare și notare**

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

Problema 1.

- a) Să se determine numerele prime a și b pentru care $2023 + a = (9b)^2$.
b) Există numere naturale x și y pentru care $2023^{4x} = y^2 + 2023$? Justificați!

Soluție:

a) Dacă a este impar, atunci membrul stâng este par, deci b este par și prim, adică este 2, dar nu verifică ecuația dată, deci a este par și prim, adică $a = 2$ 2p

$$2023 + a = (9b)^2 \Rightarrow 2023 + 2 = 2025 = 45^2 \Rightarrow b = 5, \text{ care este prim} \dots\dots\dots 2p$$

b) $2023^{4x} = y^2 + 2023 \Leftrightarrow 2023^{4x} - 2023 = y^2 \Leftrightarrow 2023(2023^{4x-1} - 1) = y^2$ 1p

$$u(2023^{4x-1}) = u(3^{4x+3}) = 7 \Rightarrow u(2023(2023^{4x-1} - 1)) = u(3 \cdot 6) = 8 \dots\dots\dots 2p$$

Dar un pătrat perfect nu poate avea ultima cifră 8, deci nu există x și y 2p

Oficiu 1p

Problema 2.

a) Arătați că pentru orice numere naturale nenule n și k are loc relația: $\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$.

b) Arătați că $\frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2023} < \frac{1}{3}$.

c) Fie $N = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{2021 \cdot 2023}$. Arătați că numărul $\frac{7077}{N}$ este pătrat perfect.

Soluție:

a) $\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \cdot \frac{n+k-n}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{n+k}{n(n+k)} - \frac{n}{n(n+k)} \right) = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$ 1p

$$b) \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{1}{70} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2023} = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2023} =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2023} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2023} \right) < \frac{1}{3} \dots\dots\dots 3p$$

$$c) N = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2023} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2023} \right) = \frac{1011}{2023} \dots\dots\dots 3p$$

$$\frac{7077}{N} = \frac{7077 \cdot 2023}{1011} = 7^2 \cdot 17^2 \dots\dots\dots 2p$$

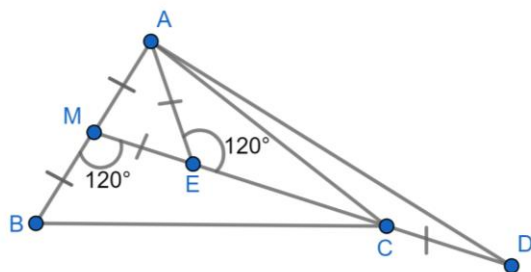
Oficiu 1p

Problema 3.

Fie triunghiul ascuțitunghic ABC , iar M mijlocul laturii AB . Pe prelungirea lui MC se consideră punctul D astfel încât $C \in (MD)$. Dacă $\sphericalangle AMC = 60^\circ$ și $AB = 2CD$, demonstrați că $BC \equiv AD$.

Gazeta Matematică

Soluție



Se consideră punctul $E \in (MC)$ astfel încât $ME \equiv AM \equiv MB \equiv CD$ 2p

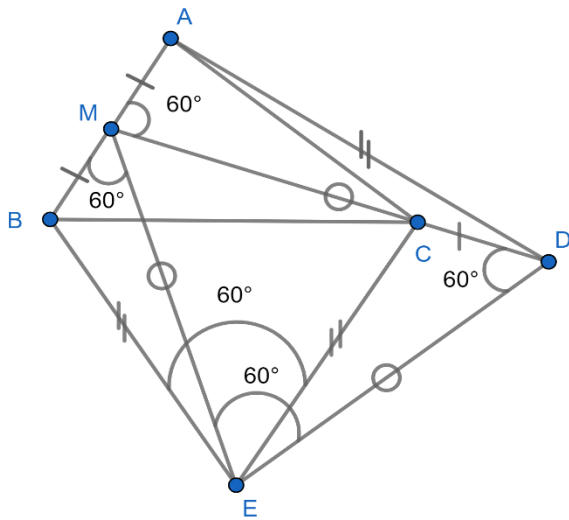
Triunghiul AME este isoscel cu un unghi de 60° , rezultă că este echilateral și atunci
 $\sphericalangle AME = \sphericalangle AEM = 60^\circ \Rightarrow \sphericalangle BMC = \sphericalangle AED = 120^\circ$ 3p

$MC = ME + EC; DE = DC + EC \Rightarrow MC = DE$ 2p

Se obține că $\triangle BMC \equiv \triangle AED (L.U.L.) \Rightarrow BC \equiv AD$ 2p

Oficiu 1p

Soluție alternativă:



- Se construiește bisectoarea unghiului $\sphericalangle BMC$ pe care se consideră punctul E astfel încât $ME \equiv MD$ 2p
- $\sphericalangle BMC = 120^\circ \Rightarrow \sphericalangle BME = \sphericalangle EMD = 60^\circ \Rightarrow \triangle MDE$ este isoscel cu un unghi de 60° , deci este echilateral, $ME \equiv MD \equiv DE$ 2p
- $\triangle BME \equiv \triangle CDE$ (L.U.L.) $\Rightarrow BE \equiv CE$, $\sphericalangle BEM \equiv \sphericalangle CED$ de unde se obține că $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BEM + \sphericalangle MED - \sphericalangle CED = \sphericalangle MED = 60^\circ$ și atunci $\triangle BCE$ este echilateral, de unde $BE \equiv CE \equiv BC$ (1)..... 2p
- $\triangle BME \equiv \triangle AMD$ (L.U.L.) $\Rightarrow BE \equiv AD$ (2)..... 2p
- Din (1) și (2) se obține $BC \equiv AD$ 1p
- Oficiu 1p



**CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVI-a, 25 martie 2023**

Clasa a VII-a

Problema 1

Aflați partea întreagă a numărului

$$A = \frac{1}{[\sqrt{2}]} + \frac{1}{[2\sqrt{5}]} + \frac{1}{[3\sqrt{10}]} + \dots + \frac{1}{[n\sqrt{n^2+1}]}$$

unde n este un număr natural nenul. Am notat $[x]$ partea întreagă a numărului x .

Problema 2

Demonstrați inegalitatea

$$\sqrt{2023} < \frac{2^{2022} \cdot (1011!)^2}{2022!}$$

Unde pentru orice număr natural nenul n , notăm $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Problema 3

Fie $ABCD$ dreptunghi și punctele $E \in (BC)$, $F \in (CD)$, astfel încât $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAF$.

Demonstrați că $AF = DF + BE$ dacă și numai dacă dreptunghiul e pătrat.

Gazeta Matematică

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



**CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVI-a, 25 martie 2023**

**Clasa a VII-a
Barem de evaluare și notare**

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

Problema 1

Aflați partea întreagă a numărului

$$A = \frac{1}{\lfloor \sqrt{2} \rfloor} + \frac{1}{\lfloor 2\sqrt{5} \rfloor} + \frac{1}{\lfloor 3\sqrt{10} \rfloor} + \dots + \frac{1}{\lfloor n\sqrt{n^2+1} \rfloor}$$

unde n este un număr natural nenul. Am notat $\lfloor x \rfloor$ partea întreagă a numărului x .

Soluție

Observăm că $\lfloor 1\sqrt{2} \rfloor = \lfloor 1\sqrt{1^2+1} \rfloor, \lfloor 2\sqrt{5} \rfloor = \lfloor 2\sqrt{2^2+1} \rfloor, \lfloor 3\sqrt{10} \rfloor = \lfloor 3\sqrt{3^2+1} \rfloor \dots\dots\dots 1p$

Pentru orice număr natural nenul n avem $n^4 < n^4 + n^2 < (n^2 + 1)^2$ și $n\sqrt{n^2+1} = \sqrt{n^4 + n^2}$

de unde deducem $\lfloor n\sqrt{n^2+1} \rfloor = n^2 \dots\dots\dots 2p$

Rescriem $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \Rightarrow A \geq 1 \dots\dots\dots 1p$

Pentru $n > 1$ avem $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}$

Cum $\frac{1}{(k-1) \cdot k} = \frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k}$, obținem $A < 2 - \frac{1}{n} \dots\dots\dots 3p$

Avem asadar $1 \leq A < 2 \dots\dots\dots 1p$

În concluzie $\lfloor A \rfloor = 1$ pentru $n > 1$

Pentru $n = 1$ avem $A = \frac{1}{\lfloor \sqrt{2} \rfloor} \Rightarrow A = 1$ și $\lfloor A \rfloor = 1 \dots\dots\dots 1p$

Oficiu.....1p

Problema 2

Demonstrați inegalitatea

$$\sqrt{2023} < \frac{2^{2022} \cdot (1011!)^2}{2022!}$$

unde pentru orice număr natural nenul n , notăm $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Soluție

Folosim inegalitatea mediilor $\sqrt{a \cdot b} < \frac{a+b}{2}$ pentru numerele a, b pozitive, diferite.....2p



Astfel obținem $\sqrt{1 \cdot 3} < \frac{1+3}{2} = 2$

$$\sqrt{3 \cdot 5} < \frac{3+5}{2} = 4$$

$$\sqrt{5 \cdot 7} < \frac{5+7}{2} = 6$$

.....

$$\sqrt{2021 \cdot 2023} < \frac{2021+2023}{2} = 2022 \dots\dots\dots 2p$$

Înmulțim relațiile și obținem

$$\sqrt{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot 2021^2 \cdot 2023} < 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2022$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2021 \cdot \sqrt{2023} < 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2022 \dots\dots\dots 3p$$

Înmulțim relația obținută cu $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2022}{2022!}$ și rezultă

$$\frac{2022! \cdot \sqrt{2023}}{2022!} < \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2022)^2}{2022!} \Leftrightarrow \sqrt{2023} < \frac{(1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1011 \cdot 2)^2}{2022!}$$

Obținem concluzia.....2p

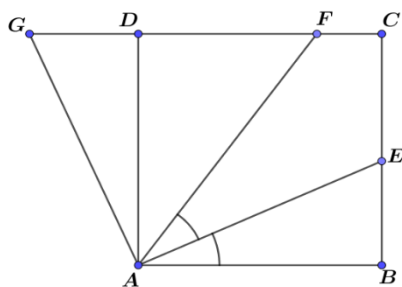
Oficiu.....1p

Problema 3

Fie $ABCD$ dreptunghi și punctele $E \in (BC)$, $F \in (CD)$, astfel încât $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAF$.
Demonstrați că $AF = DF + BE$ dacă și numai dacă dreptunghiul e pătrat.

Gazeta Matematică

Soluție



Fie $G \in CD$ astfel încât $BE = DG$ 1p

Fie $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAF \stackrel{\text{notez}}{=} x \Rightarrow \sphericalangle DFA = 2x \Rightarrow \sphericalangle DAF = 90^\circ - 2x$ 1p

" \Rightarrow " Presupun că $AF = DF + BE$ și demonstrez că $ABCD$ este pătrat



Cum $BE = DG \Rightarrow AF = DF + DG \Rightarrow AF = GF$

$\Rightarrow \triangle AFG$ este isoscel $\Rightarrow \sphericalangle FAG = \sphericalangle FGA \dots\dots\dots 1p$

Dar $\sphericalangle DFA = 2x \Rightarrow \sphericalangle FAG = \sphericalangle FGA = \frac{180^\circ - 2x}{2} = 90^\circ - x$

$\sphericalangle DAF = 90^\circ - 2x \Rightarrow \sphericalangle DAG = (90^\circ - x) - (90^\circ - 2x) = x \dots\dots\dots 1p$

$\triangle GDA, \sphericalangle D = 90^\circ, \triangle ABE, \sphericalangle B = 90^\circ$

$\left. \begin{array}{l} BE = DG \\ \sphericalangle BAE = \sphericalangle DAG \end{array} \right\} \xrightarrow{c.u.} \triangle GDA \equiv \triangle ABE \Rightarrow AB \equiv AD$

$\Rightarrow ABCD$ pătrat $\dots\dots\dots 1p$

“ \Leftarrow ” Presupun că $ABCD$ este pătrat și demonstrăm că $AF = DF + BE$

$ABCD$ pătrat $\Rightarrow AB = CD$, cum $BE = DG \Rightarrow \triangle ABE \equiv \triangle ADG \Rightarrow \sphericalangle DAG = \sphericalangle BAE = x \dots\dots 1p$

În $\triangle GFA$, $\sphericalangle G = 180^\circ - (2x + 90^\circ - x) = 90^\circ - x \dots\dots\dots 1p$

$\sphericalangle FAG = 90^\circ - 2x + x = 90^\circ - x \Rightarrow \sphericalangle FAG \equiv \sphericalangle FGA \Rightarrow \triangle AFG$ este isoscel $\dots\dots\dots 1p$

În concluzie $AF = GF \Rightarrow AF = DF + GD$ cum $BE = DG \Rightarrow AF = DF + BE \dots\dots\dots 1p$

Oficiu $\dots\dots\dots 1p$



**CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVI-a, 25 martie 2023**

Clasa a VIII-a

Problema 1

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\sqrt{|x-1|} + \sqrt{|x-2023|} = \sqrt{2022}$$

Problema 2

Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$. Fie M mijlocul lui AB , N mijlocul lui AD , iar O centrul feței $ADD' A'$.

- a) Demonstrați că dreapta $C'O$ este perpendiculară pe planul $(A'MD)$.
- b) Calculați tangenta unghiului format de planele $(C'MN)$ și $(C'CD)$.

Gazeta Matematică

Problema 3

Să se demonstreze inegalitățile:

- a) $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ oricare ar fi numerele reale x, y și z .
- b) $\sqrt{a + 3b + 5c} + \sqrt{5a + b + 3c} + \sqrt{3a + 5b + c} \leq 3\sqrt{3}$, oricare ar fi numerele reale pozitive a, b, c cu $a + b + c = 1$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



**CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVI-a, 25 martie 2023**

**Clasa a VIII-a
Barem de evaluare și notare**

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

Problema 1

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$\sqrt{|x-1|} + \sqrt{|x-2023|} = \sqrt{2022}$$

Soluție

Notez $\sqrt{|x-1|} = a$ și $\sqrt{|x-2023|} = b$, unde $a, b \geq 0$

ecuația se scrie $a + b = \sqrt{2022}$ 2p

Se obține $a^2 + 2ab + b^2 = 2022$ și $a^2 + b^2 = 2022 - 2ab \leq 2022$ 2p

dar $a^2 + b^2 = |x-1| + |x-2023| = |x-1| + |-x+2023| \geq |x-1-x+2023| = 2022$ 2p

din cele două relații avem $2022 \leq a^2 + b^2 \leq 2022 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2022$ 1p

cum $a^2 + 2ab + b^2 = 2022$ vom avea $2ab = 0$ și de aici deducem $a = 0$ sau $b = 0$ 1p

Se obține soluția $x \in \{1, 2023\}$ 1p

Oficiu.....1p

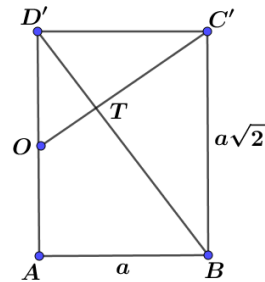
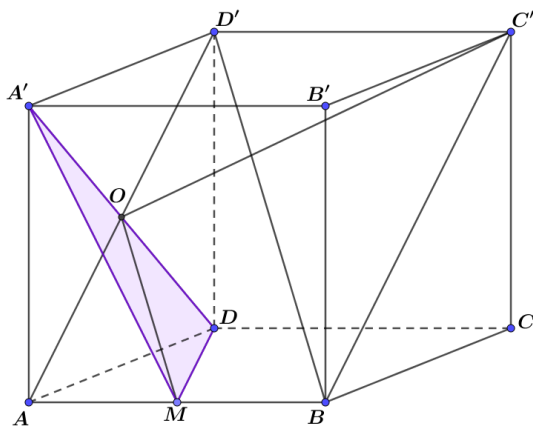
Problema 2

Se consideră cubul ABCDA'B'C'D'. Fie M mijlocul lui AB, N mijlocul lui AD, iar O centrul feței ADD'A'.

a) *Demonstrați că dreapta C'O este perpendiculară pe planul (A'MD).*

b) *Calculați tangenta unghiului format de planele (C'MN) și (C'CD).*

Soluție



a) $C'D' \perp (ADA')$, $D'O \perp A'D$ și din T3 \perp avem $C'O \perp A'D$ (1).....1p

$ABC'D'$ dreptunghi, $OC' \cap BD' = \{T\}$

$$\frac{D'O}{D'C'} = \frac{D'C'}{BC'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{LUL} \Delta OD'C' \sim \Delta D'CB \text{ atunci } \angle D'C'O = \angle D'BC' \dots\dots\dots 1p$$

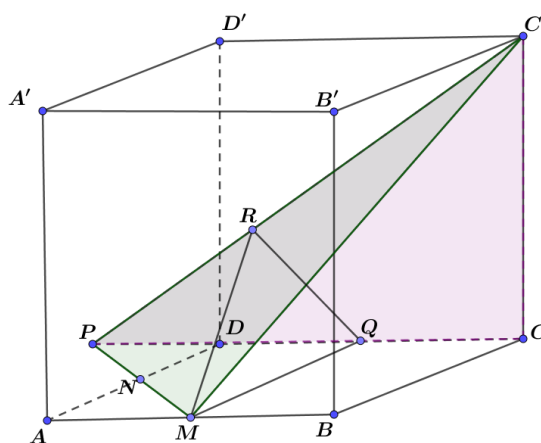
În triunghiul $D'C'T$

$$\angle D'TC' = 180^\circ - \angle D'C'T - \angle TD'C' = 180^\circ - \angle BD'C' - \angle D'BC' = 90^\circ \dots\dots\dots 1p$$

Astfel avem $C'O \perp BD'$, OM este linie mijlocie în triunghiul ABD' și $OM \parallel BD'$

atunci $C'O \perp OM$ (2)

Din relațiile (1) și (2), cum $OM, A'D \subset (MA'D)$, vom avea $C'O \perp (A'MD)$2p



b) $MN \cap DC = \{P\}$ și planul $(C'MN) = (C'MP)$



$MQ \perp (DCC')$, $Q \in DC$, $QR \perp PC'$ și din $T3 \perp$ avem $MR \perp PC'$ 1 p

$(MPC') \cap (CPC') = PC'$, $MR \perp PC'$, $QR \perp PC'$ și unghiul format de cele două plane este $\angle MRQ$ 1p

$\triangle PRQ \sim \triangle PCC'$ (U.U.) și dacă se notează muchia cubului cu a se obține $RQ = \frac{2a}{\sqrt{13}}$ 1p

În triunghiul MRQ dreptunghic, cu $\angle Q = 90^\circ$, $tg \angle MRQ = \frac{MQ}{RQ} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ 1p

Oficiu.....1p

Problema 3

Să se demonstreze inegalitățile:

- $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ oricare ar fi numerele reale x, y și z .
- $\sqrt{a+3b+5c} + \sqrt{5a+b+3c} + \sqrt{3a+5b+c} \leq 3\sqrt{3}$, oricare ar fi numerele reale pozitive a, b, c cu $a+b+c=1$.

Soluție

a) După efectuarea calculelor, inegalitatea se scrie

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \leq 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0 \dots\dots\dots 2p$$

b) Notăm $x = \sqrt{a+3b+5c}$, $y = \sqrt{5a+b+3c}$, $z = \sqrt{3a+5b+c}$

folosim inegalitatea de la punctul a).....1p

$$(\sqrt{a+3b+5c} + \sqrt{5a+b+3c} + \sqrt{3a+5b+c})^2 \leq 3\left((\sqrt{a+3b+5c})^2 + (\sqrt{5a+b+3c})^2 + (\sqrt{3a+5b+c})^2\right)$$

$$(\sqrt{a+3b+5c} + \sqrt{5a+b+3c} + \sqrt{3a+5b+c})^2 \leq 3(a+3b+5c+5a+b+3c+3a+5b+c) \dots\dots\dots 1p$$

$$(\sqrt{a+3b+5c} + \sqrt{5a+b+3c} + \sqrt{3a+5b+c})^2 \leq 3 \cdot 9(a+b+c) \dots\dots\dots 1p$$

Dar $a+b+c=1$ și rezultă

$$(\sqrt{a+3b+5c} + \sqrt{5a+b+3c} + \sqrt{3a+5b+c})^2 \leq 27 \dots\dots\dots 1p$$

$$\sqrt{(\sqrt{a+3b+5c} + \sqrt{5a+b+3c} + \sqrt{3a+5b+c})^2} \leq \sqrt{27}$$

și inegalitatea este demonstrată.....1p

Oficiu.....1p



**CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVI-a, 25 martie 2023**

Clasa a IX-a

Problema 1

Determinați funcțiile $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $\frac{x^2 + f(x)f(y)}{f(x+y)} = f(x) + f(y) - y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Traian Tămâian, Carei, G.M. 12/2022

Problema 2

Pe laturile patrulaterului $ABCD$ se consideră punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (DA)$. Se notează cu G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor QAM , MBN , NCP , respectiv PDQ , iar cu H_1 și H_2 ortocentrele triunghiurilor ABD și CBD .

a) Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.

b) Dacă $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ADC) = 90^\circ$, să se arate că dreptele AH_2 , CH_1 și BD sunt concurente într-un punct.

Nicolae Papacu, Slobozia

Problema 3

Fie numerele $a, b, c \in (0, \infty)$.

a) Să se arate că $\frac{a}{b+c+\sqrt{bc}} + \frac{b}{c+a+\sqrt{ca}} + \frac{c}{a+b+\sqrt{ab}} \geq 1$.

a) Dacă $a \leq b \leq c$ să se arate că $\frac{b+c+\sqrt{bc}}{a} + \frac{c+a+\sqrt{ca}}{b} + \frac{a+b+\sqrt{ab}}{c} \leq \frac{9}{2} \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right)$.

Nicolae Papacu, Slobozia

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



**CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVI-a, 25 martie 2023**

**Clasa a IX-a
Barem de evaluare și notare**

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

Problema 1

Determinați funcțiile $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $\frac{x^2 + f(x)f(y)}{f(x+y)} = f(x) + f(y) - y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Soluție

Avem relația: $\frac{x^2 + f(x)f(y)}{f(x+y)} = f(x) + f(y) - y \quad (1)$

În (1) $x = y = 1 \Rightarrow \frac{1 + f^2(1)}{f(2)} = 2f(1) - 1$, de unde $f(2) = \frac{1 + f^2(1)}{2f(1) - 1} = -1 + \frac{f(1)(f(1) + 2)}{2f(1) - 1}$1p

Cum $(f(1), 2f(1) - 1) = 1$ și $f(2) \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $(2f(1) - 1) \mid (f(1) + 2)$, de unde $(2f(1) - 1) \mid 2(f(1) + 2)$. Rezultă că $(2f(1) - 1) \mid 5$, deci $2f(1) - 1 \in \{1, 5\}$, adică $f(1) \in \{1, 3\}$ 3p

În (1) $y = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + f(x)f(1)}{f(x+1)} = f(x) + f(1) - 1$, de unde $f(x+1) = \frac{x^2 + f(x)f(1)}{f(x) + f(1) - 1}$.

Pentru $f(1) = 1$, avem $f(x+1) = \frac{x^2 + f(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{f(x)} + 1$. Prin inducție se obține $f(x) = x$,

$\forall x \in \mathbb{N}^*$ 3p

Pentru $f(1) = 3$, avem $f(x+1) = \frac{x^2 + 3f(x)}{f(x) + 2}$. Atunci $f(2) = \frac{1 + 3f(1)}{f(1) + 2} = 2$, iar

$f(3) = \frac{4 + 3f(2)}{f(2) + 2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}^*$ 2p

În concluzie singura funcție care verifică relația din enunț este $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{N}^*$.
Oficiu..... 1p

Problema 2

Pe laturile patrulaterului $ABCD$ se consideră punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (DA)$. Se notează cu G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor QAM , MBN , NCP , respectiv PDQ , iar cu H_1 și H_2 ortocentrele triunghiurilor ABD și CBD .

a) Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.



b) Dacă $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ADC) = 90^\circ$, să se arate că dreptele AH_2 , CH_1 și BD sunt concurente într-un punct.

Soluție

a) În rezolvare vom folosi vectorii de poziție. Se cunoaște că $ABCD$ paralelogram dacă și numai dacă $\vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D$. ($\vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D \Leftrightarrow \vec{r}_C - \vec{r}_D = \vec{r}_B - \vec{r}_A \Leftrightarrow \overline{DC} = \overline{AB}$) 1p

Folosind formula vectorului de poziție al centrului de greutate al unui triunghi, avem

$$3\vec{r}_{G_1} = \vec{r}_A + \vec{r}_Q + \vec{r}_M, \quad 3\vec{r}_{G_3} = \vec{r}_C + \vec{r}_P + \vec{r}_N \text{ și atunci}$$

$$3(\vec{r}_{G_1} + \vec{r}_{G_3}) = \vec{r}_A + \vec{r}_C + \vec{r}_M + \vec{r}_N + \vec{r}_P + \vec{r}_Q.$$

$$\text{Analog } 3(\vec{r}_{G_2} + \vec{r}_{G_4}) = \vec{r}_B + \vec{r}_D + \vec{r}_M + \vec{r}_N + \vec{r}_P + \vec{r}_Q. \dots\dots\dots 2p$$

Atunci $\vec{r}_{G_1} + \vec{r}_{G_3} = \vec{r}_{G_2} + \vec{r}_{G_4} \Leftrightarrow \vec{r}_A + \vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_D$, deci $ABCD$ paralelogram $\Leftrightarrow G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.2p

b) Soluția vectorială.

Din $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ADC) = 90^\circ$, rezultă că patrulaterul $ABCD$ este inscripșibil iar O centrul cercului circumscris este mijlocul lui (AC) . Folosind relația lui Sylvester pentru triunghiul CBD ,

$$\text{avem } \overline{OH_2} = \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}. \text{ Fie } E \text{ este mijlocul lui } (BD), \text{ atunci avem } \overline{OE} = \frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OD}) \text{ și}$$

$$\text{deci } \overline{OH_2} = \overline{OC} + 2 \cdot \overline{OE}. \dots\dots\dots 2p$$

Cum $\overline{AO} = \overline{OC}$, avem $\overline{AH_2} = \overline{AO} + \overline{OH_2} = 2(\overline{AO} + \overline{OE}) = 2 \cdot \overline{AE}$, deci punctele A, E, H_2 sunt coliniare și deci $AH_2 \cap BD = \{E\}$1p

În mod analog $CH_1 \cap BD = \{E\}$, deci cele trei drepte sunt concurente în punctul E 1p

Soluția sintetică.

Cum $BH_2 \perp CD, AD \perp CD \Rightarrow BH_2 \parallel AD, DH_2 \perp BC, AB \perp BC \Rightarrow DH_2 \parallel AB$, deci patrulaterul ABH_2D este paralelogram. Atunci mijloacele diagonalelor coincid, deci $AH_2 \cap BD = \{E\}$ E fiind mijlocul lui (BD) și (AH_2)

Cum $BH_1 \perp AD, CD \perp AD \Rightarrow BH_1 \parallel CD, DH_1 \perp AB, BC \perp AB \Rightarrow DH_1 \parallel BC$, deci patrulaterul CBH_1D este paralelogram. Atunci mijloacele diagonalelor coincid, deci $CH_1 \cap BD = \{E\}$ E fiind mijlocul lui (BD) și (CH_1) . Așadar $BD \cap AH_2 \cap CH_1 = \{E\}$

Oficiu1p

Problema 3

Fie numerele $a, b, c \in (0, \infty)$.

a) Să se arate că $\frac{a}{b+c+\sqrt{bc}} + \frac{b}{c+a+\sqrt{ca}} + \frac{c}{a+b+\sqrt{ab}} \geq 1$.

a) Dacă $a \leq b \leq c$ să se arate că $\frac{b+c+\sqrt{bc}}{a} + \frac{c+a+\sqrt{ca}}{b} + \frac{a+b+\sqrt{ab}}{c} \leq \frac{9}{2} \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right)$.

Soluție.



a) Folosind inegalitatea mediilor ($\sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}$), avem $\frac{a}{b+c+\sqrt{bc}} \geq \frac{2a}{3(b+c)} = \frac{2a^2}{3(ab+ac)}$ 1p

Folosind inegalitatea Bergstrom, avem

$\sum \frac{a}{b+c+\sqrt{bc}} \geq \sum \frac{2a^2}{3(ab+ac)} \geq \frac{2(\sum a)^2}{3\sum(ab+ac)} = \frac{2\sum a^2 + 4\sum ab}{6\sum ab}$. Deoarece $\sum a^2 \geq \sum ab$, avem

$\sum \frac{a}{b+c+\sqrt{bc}} \geq \frac{2\sum ab + 4\sum ab}{6\sum ab} = 1$3p

b) Folosind inegalitatea mediilor, avem $\sum \frac{b+c+\sqrt{bc}}{a} \leq \sum \frac{3(b+c)}{2a} = \frac{3}{2} \sum \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$. Demonstrăm

că $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq \frac{c}{a} + \frac{a}{c}$. Avem $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \Leftrightarrow a \frac{c-b}{bc} \leq \frac{c-b}{a} \Leftrightarrow \frac{(a^2-bc)(c-b)}{abc} \leq 0$, care este adevărată pentru că $a \leq b \leq c$.

.....3p

Analog $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \leq \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \Leftrightarrow \frac{b-a}{c} \leq \frac{c(b-a)}{ab} \Leftrightarrow \frac{(ab-c^2)(b-a)}{abc} \leq 0$, adevărată pentru că $a \leq b \leq c$.

Deci $\sum \frac{b+c+\sqrt{bc}}{a} \leq \frac{9}{2} \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right)$2p

Oficiu1p



**CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVI-a, 25 martie 2023**

Clasa a X-a

Problema 1.

Fie $z, v \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că $|z+v| = |zv+1|$. Arătați că $|z+1| \cdot |v+1| \leq 2$ sau $|zv+2(z+v)+1| \geq 3$.

Traian Tămâian, Carei, G.M. 12/2022

Problema 2.

Fie p un număr întreg și funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $2f(f(x)) - (2p+1)f(x) + px = 0$, pentru orice număr întreg x .

- a) Să se arate că funcția f este injectivă dacă și numai dacă $p \in \mathbb{Z}^*$
- b) Determinați funcția f .

Margărit Marian, Slobozia

Problema 3.

Fie numerele $a, b, c \in (0, \infty)$. Să se arate că este adevărată inegalitatea

$$\frac{1+2a-3\sqrt[3]{bc}}{a+2(b+c)} + \frac{1+2b-3\sqrt[3]{ac}}{b+2(a+c)} + \frac{1+2c-3\sqrt[3]{ab}}{c+2(a+b)} \geq 0.$$

Nicolae Papacu, Slobozia

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



**CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVI-a, 25 martie 2023**

**Clasa a X-a
Barem de evaluare și notare**

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

Problema 1.

Fie $z, v \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că $|z+v|=|zv+1|$. Arătați că $|z+1| \cdot |v+1| \leq 2$ sau $|zv+2(z+v)+1| \geq 3$.

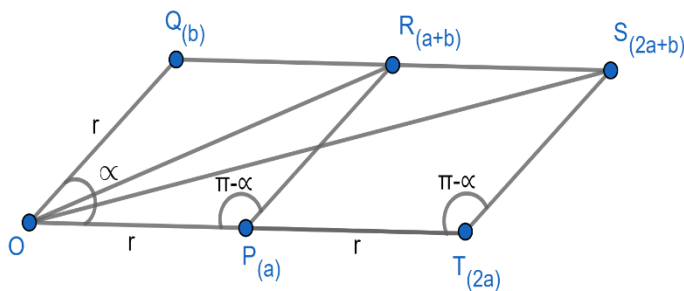
Gazeta Matematică

Soluție

Fie $a = z+v$ și $b = zv+1$.

Avem $|z+1| \cdot |v+1| = |zv+z+v+1| = |a+b|$ și $|zv+2(z+v)+1| = |b+2a|$ 1p

În planul complex xOy , fie $P(a), Q(b)$ și $\alpha = m(\angle POQ)$.



Dacă $\alpha = 0$, atunci $a = b \Rightarrow z+v = zv+1 \Rightarrow (z-1)(v-1) = 0 \Rightarrow z = 1$ sau $v = 1$.

Dacă $z = 1$, trebuie să arătăm că $|z+1| \cdot |v+1| \leq 2$ sau $|zv+2(z+v)+1| \geq 3 \Leftrightarrow |v+1| \leq 1$ sau $|v+1| \geq 1$, ceea ce este adevărat. Analog pentru $v = 1$ 1p

Dacă $\alpha = \pi$, atunci $a = -b \Rightarrow z+v = -zv-1 \Rightarrow z = -1$ sau $v = -1$.

Dacă $z = -1$ sau $v = -1$, atunci $|z+1| \cdot |v+1| = 0 \leq 2$ 1p

Dacă $\alpha \in (0, \pi)$, fie $R(a+b), T(2a)$ și $S(2a+b)$. Avem că $|a| = |b| = r$.

Presupunem că $|a+b| > 2$ și demonstrăm că $|b+2a| \geq 3$.



$$OPRQ \text{ este romb și din } \triangle OPR, \left. \begin{array}{l} OP + PR > OR \\ OR = |a + b| > 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2r > 2 \Rightarrow r > 1 \quad (1) \dots\dots\dots 2p$$

Din teorema cosinusului, avem că $OR^2 = 2r^2 + 2r^2 \cos \alpha = 2r^2 (1 + \cos \alpha) = 4r^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} OR = 2r \cos \frac{\alpha}{2} \\ OR > 2 \end{array} \right\} \Rightarrow r \cos \frac{\alpha}{2} > 1 \quad (2) \dots\dots\dots 2p$$

Din teorema cosinusului în $\triangle OTS$, obținem că $OS^2 = r^2 + 4r^2 (1 + \cos \alpha) \Rightarrow OS^2 = r^2 + 8r^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

și, ținând cont de relațiile (1) și (2), obținem că $OS^2 > 9 \Rightarrow OS > 3 \Rightarrow |b + 2a| > 3$ și problema este încheiată. 2p

Oficiu 1p

Problema 2.

Fie p un număr întreg și funcția $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $2f(f(x)) - (2p + 1)f(x) + px = 0$, pentru orice număr întreg x .

a) Să se arate că funcția f este injectivă dacă și numai dacă $p \in \mathbb{Z}^*$

b) Determinați funcția f .

Soluție

a) $p \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow f$ injectivă.

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ cu $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ și cum

$$2f(f(x_k)) - (2p + 1)f(x_k) + px_k = 0, \quad k = \overline{1, 2}, \text{ rezultă } px_1 = px_2, \text{ deci } x_1 = x_2 \text{ și prin urmare } f \text{ este injectivă. 2p}$$

f injectivă $\Rightarrow p \in \mathbb{Z}^*$.

Presupunem prin absurd că $p = 0$. Atunci relația din enunț devine $2f(f(x)) - f(x) = 0$,

Notând cu $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ ori}}$ se demonstrează prin inducție matematică după $n \in \mathbb{N}^*$ că

$$2^n f(f_n(x)) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{Z}. \quad (2^{k+1} f(f_{k+1}(x)) = 2 \cdot 2^k f(f_k(f(x))) = 2f(f(x)) = f(x))$$

Rezultă atunci că $2^n | f(x)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in \mathbb{Z}$. De aici, avem că $f(x) = 0$, deci f nu este injectivă, ceea ce este o contradicție. 2p

b) Relația din enunț se mai scrie $2(f(f(x)) - pf(x)) = f(x) - px, \quad \forall x \in \mathbb{Z}$.

Fie funcția $g(x) = f(x) - px$. Atunci relația de mai înainte se scrie sub forma $2g(f(x)) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{Z}$.

Notând cu $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ ori}}$, se demonstrează prin inducție că $2^n g(f_n(x)) = g(x)$, pentru orice

$$n \in \mathbb{N}^*, \text{ unde } x \in \mathbb{Z}. \quad (2^{k+1} g(f_{k+1}(x)) = 2 \cdot 2^k g(f_k(f(x))) = 2g(f(x)) = g(x)). \dots\dots\dots 3p$$

Rezultă atunci că $2^n | g(x)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in \mathbb{Z}$. De aici, avem că $g(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{Z}$ și atunci funcția este $f(x) = px$ 2p



Oficiu 1p

Problema 3

Fie numerele $a, b, c \in (0, \infty)$. Să se arate că este adevărată inegalitatea

$$\frac{1+2a-3\sqrt[3]{bc}}{a+2(b+c)} + \frac{1+2b-3\sqrt[3]{ac}}{b+2(a+c)} + \frac{1+2c-3\sqrt[3]{ab}}{c+2(a+b)} \geq 0.$$

Soluție

Folosind inegalitatea mediilor ($\sqrt[3]{bc} = \sqrt[3]{1 \cdot b \cdot c} \leq \frac{1+b+c}{3}$), avem $\frac{1+2a-3\sqrt[3]{bc}}{a+2(b+c)} \geq \frac{2a-b-c}{a+2(b+c)}$ și analogele. 2p

Deci avem $S = \sum \frac{1+2a-3\sqrt[3]{bc}}{a+2(b+c)} \geq \sum \frac{2a-b-c}{a+2(b+c)} = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{5a}{a+2(b+c)} - 1 \right) = \frac{5}{2} \sum \frac{a}{a+2(b+c)} - \frac{3}{2}$.
..... 1p

Cum $E = \sum \frac{a}{a+2(b+c)} = \sum \frac{a^2}{a^2+2(ab+ac)}$, folosind inegalitatea Bergstrom (Titu), avem

$$E = \sum \frac{a^2}{a^2+2(ab+ac)} \geq \frac{(\sum a)^2}{\sum (a^2+2(ab+ac))} = \frac{\sum a^2+2\sum ab}{\sum a^2+4\sum ab}. \text{ Atunci } S \geq \frac{5}{2} \cdot \frac{\sum a^2+2\sum ab}{\sum a^2+4\sum ab} - \frac{3}{2}.$$

..... 3p

Demonstrăm că $\frac{5}{2} \cdot \frac{\sum a^2+2\sum ab}{\sum a^2+4\sum ab} - \frac{3}{2} \geq 0$, relație care este echivalentă cu

$$2\sum a^2 \geq 2\sum ab \Leftrightarrow \sum (a-b)^2 \geq 0, \text{ evident adevărată.}$$

Deci $\sum \frac{1+2a-3\sqrt[3]{bc}}{a+2(b+c)} \geq 0$, egalitate pentru $a=b=c=1$ 3p

Oficiu 1p



**CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVI-a, 25 martie 2023**

Clasa a XI-a

Problema 1

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu $x_1 \in (0,1)$ și $x_{n+1} = \frac{\sqrt{1+x_n} - \sqrt{1-x_n}}{2}$, pentru orice $n \geq 1$. Arătați că șirul este descrescător și studiați convergența șirurilor $(y_n)_{n \geq 1}$ și $(z_n)_{n \geq 1}$, unde $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$, $z_n = 2^n \cdot x_n$, pentru orice $n \geq 1$.

Ion Ciudin, Botoșani G. M. 12/2022

Problema 2

Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R}) - \{O_2\}$ astfel încât $(A+B)^{2022} = (A-B)^{2023} = O_2$. Să se arate că $\text{Tr}A = \text{Tr}B = \text{Tr}(AB) = 0$ și $\det A + \det B = 0$.

Nicolae Papacu, Slobozia

Problema 3

Să se determine funcțiile continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația $f(f(x)) + 2022f(x) = 2023x + 2024$, pentru orice număr real x .

Rică Zamfir, București

**Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.**



**CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVI-a, 25 martie 2023**

**Clasa a XI-a
Barem de evaluare și notare**

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

Problema 1

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu $x_1 \in (0,1)$ și $x_{n+1} = \frac{\sqrt{1+x_n} - \sqrt{1-x_n}}{2}$, pentru orice $n \geq 1$. Arătați că șirul este descrescător și studiați convergența șirurilor $(y_n)_{n \geq 1}$ și $(z_n)_{n \geq 1}$, unde $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$, $z_n = 2^n \cdot x_n$, pentru orice $n \geq 1$.

Soluție

Evident $x_n, y_n, z_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Avem $x_{n+1} = \frac{\sqrt{1+x_n} - \sqrt{1-x_n}}{2} = \frac{x_n}{\sqrt{1+x_n} + \sqrt{1-x_n}}$ și atunci

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\sqrt{1+x_n} + \sqrt{1-x_n}} < \frac{1}{\sqrt{1+x_n}} < 1, \text{ deci șirul } (x_n)_{n \geq 1} \text{ este descrescător și } x_n \in (0, x_1) \subset (0,1).$$

.....3p

Avem $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\sqrt{1+x_n} + \sqrt{1-x_n}} < 1$ și atunci $y_n \in (0,1)$. Cum șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător,

atunci șirul $y_n^2 = \frac{1}{2+2\sqrt{1-x_n^2}}$ este descrescător, deci și șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ este descrescător. Cum

$y_n \in (0,1)$, rezultă că șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ este convergent. 2p

Cum $x_n \in (0,1)$, atunci există $t_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $x_n = \cos t_n$. Relația $x_{n+1} = \frac{\sqrt{1+x_n} - \sqrt{1-x_n}}{2}$

$$\text{devine } \cos t_{n+1} = \frac{\sqrt{1+\cos t_n} - \sqrt{1-\cos t_n}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cos \frac{t_n}{2} - \sqrt{2} \sin \frac{t_n}{2}}{2} = \cos \left(\frac{t_n}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ și cum}$$

$t_{n+1}, \frac{t_n}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $t_{n+1} = \frac{t_n}{2} + \frac{\pi}{4}$, $n \geq 1$. Avem $2^{n+1} \cdot t_{n+1} = 2^n \cdot t_n + 2^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4}$. Rezultă că

$$\sum_{k=1}^{n-1} (2^{k+1} \cdot t_{k+1} - 2^k \cdot t_k) = \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4}, \text{ deci } 2^n \cdot t_n - 2 \cdot t_1 = 4 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2-1} \cdot \frac{\pi}{4}, \text{ de unde}$$

$$t_n = \frac{t_1}{2^{n-1}} + \pi \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2^n} = \frac{\pi}{2} + \frac{2t_1 - \pi}{2^n}. \text{2p}$$



Avem $x_n = \cos t_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2t_1 - \pi}{2^n}\right) = -\sin \frac{2t_1 - \pi}{2^n} = \sin \frac{\pi - 2t_1}{2^n}$ și atunci $z_n = 2^n \sin \frac{\pi - 2t_1}{2^n}$.

Imediat $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi - 2t_1}{2^n} \cdot 2^n}{\frac{\pi - 2t_1}{2^n}} = \pi - 2t_1 \in (0, \pi)$, deci șirul $(z_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

..... 2p
 Oficiu 1p

Problema 2

Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R}) - \{O_2\}$ astfel încât $(A + B)^{2022} = (A - B)^{2023} = O_2$. Să se arate că $TrA = TrB = Tr(AB) = 0$ și $\det A + \det B = 0$.

Soluție

Lemă.(rezultat cunoscut) Dacă pentru $C \in M_2(\mathbb{R})$ și $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, avem $C^n = O_2$, atunci

$$C^2 = O_2$$

Demonstrație. Din $C^n = O_2$ rezultă $\det C = 0$ și atunci folosind relația Cayley Hamilton, avem

$$C^2 = (TrC)C.$$

Imediat prin inducție $C^n = (TrC)^{n-1} \cdot C$. Ținând cont că $C^n = O_2, C \neq O_2$ din

$$C^n = (TrC)^{n-1} \cdot C, \text{ rezultă că } TrC = 0 \text{ și deci } C^2 = O_2. \dots\dots\dots 2p$$

Folosind lema, avem $(A + B)^2 = (A - B)^2 = O_2$, de unde $A^2 + B^2 = AB + BA = O_2$.

Din $AB + BA = O_2$, avem $Tr(AB + BA) = Tr(AB) + Tr(BA) = 0$ și cum $Tr(AB) = Tr(BA)$, obținem $Tr(AB) = Tr(BA) = 0$ 2p

Din $(A + B)^2 = (A - B)^2 = O_2$, obținem $\det(A + B) = \det(A - B) = 0$. Folosind relația cunoscută $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det A + \det B)$, obținem $\det A + \det B = 0$ 2p

Folosind formula Cayley Hamilton, avem $A^2 + B^2 = TrA \cdot A + TrB \cdot B - (\det A + \det B)I_2$. Deoarece $A^2 + B^2 = O_2$ și $\det A + \det B = 0$, avem $TrA \cdot A + TrB \cdot B = O_2$.

Rezultă $TrA = TrB = 0$. (Dacă spre exemplu $TrB \neq 0$, avem $B = -\frac{TrA}{TrB} \cdot A$ și din $A^2 + B^2 = O_2$,

obținem $(Tr^2A + Tr^2B)A^2 = O_2$. Deoarece $(Tr^2A + Tr^2B) \neq 0$ ($TrB \neq 0$) avem $A^2 = O_2$. Imediat

$\det A = 0$ și atunci $O_2 = A^2 = TrA \cdot A$, Deoarece $A \neq O_2$, rezultă $TrA = 0$. Imediat din

$TrA \cdot A + TrB \cdot B = O_2$, avem $TrB = 0$. Contradicție). 3p

Oficiu 1p

Problema 3

Să se determine funcțiile continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația

$$f(f(x)) + 2022f(x) = 2023x + 2024, \text{ pentru orice număr real } x.$$



Soluție

Arătăm mai întâi că funcția f nu are puncte fixe. Într-adevăr dacă există $a \in \mathbb{R}$ cu $f(a) = a$, găsim $a + 2022a = 2023a + 2024$, absurd.1p

Deoarece f este continuă și nu are puncte fixe, obținem că $f(x) - x$ are semn constant pe \mathbb{R} .

Dacă am avea $f(x) < x, \forall x \in \mathbb{R}$, atunci $f(f(x)) < f(x) < x$, deci

$$2023x + 2024 = f(f(x)) + 2022f(x) < 2023x, \text{ absurd.}$$

Așadar $f(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$2p

Relația din enunț mai poate fi scrisă $f(f(x)) - f(x) - 1 = -2023(f(x) - x - 1)$. Dacă înlocuim pe

x cu $f(x)$, apoi în noua relație înlocuim iarăși pe x cu $f(x)$, ș.a.m.d., după n pași găsim

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) - 1 = -2023(f_n(x) - f_{n-1}(x) - 1), \text{ unde am notat } f_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ ori}}. \dots\dots\dots 2p$$

Pentru x fixat, fie $a_n = f_n(x) - f_{n-1}(x) - 1$. Atunci $a_{n+1} = -2023a_n$, de unde $a_n = (-2023)^{n-1} a_1$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem $f_{n+1} > f_n$, deci $a_n > -1$2p

Pentru n par, din $a_n = -2023^{n-1} a_1 > -1$, avem $a_1 < \frac{1}{2023^{n-1}}$, iar pentru n impar, obținem

$$a_1 > -\frac{1}{2023^{n-1}}. \text{ Așadar } a_1 \in \left(-\frac{1}{2023^{n-1}}, \frac{1}{2023^{n-1}}\right) \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*, \text{ de unde } a_1 = 0.$$

În concluzie $f(x) = x + 1$2p

Oficiu1p



**CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVI-a, 25 martie 2023**

Clasa a XII-a

Problema 1

Fie $M = (0, \infty)$. Determinați numerele reale $a > 0$ pentru care există funcțiile $f : M \rightarrow M$ și $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $(M \setminus \{a\}, \circ)$ să fie grup, unde $x \circ y = f(x)^{g(y)}$ pentru orice $x, y \in M$.

Romanța Ghiță și Ioan Ghiță, Blaj, G. M.1/2023

Problema 2

Calculați $I = \int_{-1}^1 \frac{a^{2x} + 1}{a^x + b^x} dx$ unde $a, b > 0$, $a, b \neq 1$.

Popescu Marcel

Problema 3

Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^3 \sqrt[n]{(x+2)^n + (6-x)^n} dx$

Popescu Marcel

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



**CONCURSUL INTERJUDETEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVI-a, 25 martie 2023**

**Clasa a XII-a
Barem de evaluare și notare**

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

Problema 1

Fie $M = (0, \infty)$. Determinați numerele reale $a > 0$ pentru care există funcțiile $f : M \rightarrow M$ și $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $(M \setminus \{a\}, \circ)$ să fie grup, unde $x \circ y = f(x)^{g(y)}$ pentru orice $x, y \in M$.

Gazeta Matematică

Soluție

$$x \circ \alpha = x, \forall x \in (0, \infty) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x)^{g(\alpha)} = x \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{g(\alpha)}}$$

Notăm $u = \frac{1}{g(\alpha)}$ și avem $f(x) = x^u, u \in \mathbb{R}^*$ 2p

$$\alpha \circ x = x, \forall x \in (0, \infty) \setminus \{a\} \Rightarrow f(\alpha)^{g(x)} = x \Rightarrow g(x) \ln f(\alpha) = \ln x \Rightarrow g(x) = \frac{\ln x}{\ln f(\alpha)}$$

Notăm $v = \frac{1}{\ln f(\alpha)}$ și avem $g(x) = v \ln x, v \in \mathbb{R}^*$ 2p

Legea devine $x \circ y = f(x)^{g(y)} = (x^u)^{v \ln y} = x^{uv \ln y} = e^{uv \ln x \ln y}$

$$x \circ \alpha = x \Rightarrow x^{uv \ln \alpha} = x \Rightarrow uv \ln \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = e^{\frac{1}{uv}} \dots\dots\dots 1p$$

$$(x \circ y) \circ z = x^{uv \ln y} \circ z = (x^{uv \ln y})^{uv \ln z} = x^{(uv)^2 \ln y \ln z}$$

$$x \circ (y \circ z) = x \circ y^{uv \ln z} = x^{uv \ln y^{uv \ln z}} = x^{(uv)^2 \ln y \ln z} \dots\dots\dots 1p$$

deci legea este asociativă.

$$\forall x \in (0, \infty) \setminus \{a\}, \exists x' \in (0, \infty) \setminus \{a\} \text{ cu } x \circ x' = x' \circ x = \alpha$$

$$x^{uv \ln x'} = e^{\frac{1}{uv}} \Rightarrow uv \ln x' \ln x = \frac{1}{uv} \Rightarrow \ln x' \ln x = \frac{1}{(uv)^2} \Rightarrow x \neq 1 \text{ și } x' = e^{\frac{1}{(uv)^2 \ln x}}, \text{ deci } a = 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$\forall x, y \in (0, \infty) \setminus \{1\} \Rightarrow x \circ y = e^{uv \ln x \ln y} \in (0, \infty) \setminus \{1\} \text{ pentru că } u, v, \ln x, \ln y \neq 0 \dots\dots\dots 1p$$

Oficiu.....1p

Problema 2



Calculați $I = \int_{-1}^1 \frac{a^{2x} + 1}{a^x + b^x} dx$ unde $a, b > 0, a, b \neq 1$.

Soluție

$x = -t, dx = -dt, x = -1 \Rightarrow t = 1, x = 1 \Rightarrow t = -1$ 1p

$I = \int_1^{-1} \frac{a^{-2t} + 1}{a^{-t} + b^{-t}} (-dt) = \int_{-1}^1 \frac{\frac{1}{a^{2t}} + 1}{\frac{1}{a^t} + \frac{1}{b^t}} dt = \int_{-1}^1 \frac{a^t b^t (1 + a^{2t})}{a^{2t} (a^t + b^t)} dt = \int_{-1}^1 \frac{b^t (1 + a^{2t})}{a^t (a^t + b^t)} dt$ 3p

$2I = \int_{-1}^1 \frac{a^{2x} + 1}{a^x + b^x} dx + \int_{-1}^1 \frac{b^x (1 + a^{2x})}{a^x (a^x + b^x)} dx = \int_{-1}^1 \frac{a^x (a^{2x} + 1) + b^x (1 + a^{2x})}{a^x (a^x + b^x)} dx$
 $= \int_{-1}^1 \frac{(a^{2x} + 1)(a^x + b^x)}{a^x (a^x + b^x)} dx$ 2p

$2I = \int_{-1}^1 \frac{a^{2x} + 1}{a^x} dx = \int_{-1}^1 (a^x + a^{-x}) dx = \left(\frac{a^x}{\ln a} - \frac{a^{-x}}{\ln a} \right) \Big|_{-1}^1$ 2p

$2I = \frac{1}{\ln a} \left(a^x - \frac{1}{a^x} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{\ln a} \left(a - \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + a \right) = \frac{2}{\ln a} \left(a - \frac{1}{a} \right)$

de unde $I = \frac{1}{\ln a} \left(a - \frac{1}{a} \right)$ 1p

Oficiu.....1p

Problema 3

Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^3 \sqrt[n]{(x+2)^n + (6-x)^n} dx$.

Soluție

$I_n = \int_1^3 \sqrt[n]{(x+2)^n + (6-x)^n} dx$

$I_n = \int_1^2 \sqrt[n]{(x+2)^n + (6-x)^n} dx + \int_2^3 \sqrt[n]{(x+2)^n + (6-x)^n} dx$

În cea de-a doua integrală, notăm $x + 2 = 6 - t, x = 4 - t, dx = -dt$

Pentru $x = 2 \Rightarrow t = 2$ și pentru $x = 3 \Rightarrow t = 1$



$$\int_2^3 \sqrt[n]{(x+2)^n + (6-x)^n} dx = \int_2^1 \sqrt[n]{(6-t)^n + (t+2)^n} (-dt) = \int_1^2 \sqrt[n]{(6-t)^n + (t+2)^n} dt \dots\dots\dots 3p$$

$$I_n = 2 \int_1^2 \sqrt[n]{(x+2)^n + (6-x)^n} dx = 2 \int_1^2 (6-x) \sqrt[n]{\left(\frac{x+2}{6-x}\right)^n + 1} dx \dots\dots\dots 2p$$

$$\frac{x+2}{6-x} = y, \quad x+2 = 6y - xy \Rightarrow x = \frac{6y-2}{y+1}$$

$$dx = \frac{6(y+1) - (6y-2)}{(y+1)^2} dy = \frac{8}{(y+1)^2} dy$$

Pentru $x=1 \Rightarrow y = \frac{3}{5}$, pentru $x=2 \Rightarrow y=1$

$$I_n = 2 \int_{\frac{3}{5}}^1 \left(6 - \frac{6y-2}{y+1}\right) \sqrt[n]{y^n + 1} \cdot \frac{8}{(y+1)^2} dy = 2 \int_{\frac{3}{5}}^1 \frac{64}{(y+1)^3} \sqrt[n]{y^n + 1} dy$$

$$= 128 \int_{\frac{3}{5}}^1 \frac{1}{(y+1)^3} \sqrt[n]{y^n + 1} dy \dots\dots\dots 2p$$

Pentru $y \in \left[\frac{3}{5}, 1\right] \Rightarrow 1 < \sqrt[n]{y^n + 1} \leq \sqrt[n]{2}$ de unde $\frac{1}{(y+1)^3} < \frac{1}{(y+1)^3} \sqrt[n]{y^n + 1} \leq \frac{1}{(y+1)^3} \sqrt[n]{2}$

$$\int_{\frac{3}{5}}^1 \frac{1}{(y+1)^3} dy < \int_{\frac{3}{5}}^1 \frac{1}{(y+1)^3} \sqrt[n]{y^n + 1} dy < \sqrt[n]{2} \int_{\frac{3}{5}}^1 \frac{1}{(y+1)^3} dy \quad (1) \dots\dots\dots 1p$$

$$\int_{\frac{3}{5}}^1 \frac{1}{(y+1)^3} dy = \frac{(y+1)^{-2}}{-2} \Big|_{\frac{3}{5}}^1 = -\frac{1}{2(y+1)^2} \Big|_{\frac{3}{5}}^1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{128} = -\frac{1}{8} + \frac{25}{128} = \frac{9}{128}$$

Relația (1) devine acum $\frac{9}{128} < \int_{\frac{3}{5}}^1 \frac{1}{(y+1)^3} \sqrt[n]{y^n + 1} dy < \sqrt[n]{2} \frac{9}{128}$

Și cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$, cu teorema cleștelui obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{3}{5}}^1 \frac{1}{(y+1)^3} \sqrt[n]{y^n + 1} dy = \frac{9}{128} \quad \text{de unde se obține } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 128 \cdot \frac{9}{128} = 9 \dots\dots\dots 1p$$

Oficiu..... 1p

