



**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024**

**Clasa a XII-a**

**Problema 1**

Aflați  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 1$ , astfel încât  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a+2x\sqrt{1-x^2}}} dx = \frac{\pi}{4}$ .

Gazeta Matematică

**Problema 2**

Fie  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  inelul claselor de resturi modulo  $n$ ,  $n \geq 2$  și mulțimea

$$A(\mathbb{Z}_n) = \{x \in \mathbb{Z}_n \mid x^2 - x + \hat{1} = \hat{0}\}.$$

- a) Dacă  $\alpha \in A(\mathbb{Z}_n)$ , demonstrați că  $\alpha$  este inversabil și  $\alpha^{-1} = \alpha^5$ .
- b) Dacă mulțimea  $A(\mathbb{Z}_n)$  are un singur element, arătați că  $n = 3$ .
- c) Dacă  $n$  este un număr prim de forma  $n = 6k + 5$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , atunci  $A(\mathbb{Z}_n)$  este mulțimea vidă.

**Problema 3**

Să se arate că  $\frac{49}{36e} \leq \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{e^x + 1} dx \leq \ln \frac{e+1}{2}$ .

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Timp de lucru 3 ore.**

**Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.**



**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024**

**Clasa a XII-a  
Barem de evaluare și notare**

**Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.**

**Problema 1**

Aflați  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 1$ , astfel încât  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a+2x\sqrt{1-x^2}}} dx = \frac{\pi}{4}$ .

*Romanța și Ioan Ghiță, Blaj, G.M. 1/2024*

**Soluție**

Fie  $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a+2x\sqrt{1-x^2}}} dx$ , Cu schimbarea de variabilă  $x = \sin t$  ( $x=0 \Rightarrow t=0$ ,  $x=1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ ,

$dx = \cos t dt$ ), avem  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{a + \sin 2t}} dt \dots\dots\dots 2p$

Cu schimbarea de variabilă  $x = \cos t$  ( $x=0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ ,  $x=1 \Rightarrow t=0$ ,  $dx = -\sin t dt$ ), avem

$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-\sin t}{\sqrt{a + \sin 2t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sqrt{a + \sin 2t}} dt \dots\dots\dots 2p$

Atunci  $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{a + \sin 2t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{a+1 - (\sin t - \cos t)^2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t - \cos t)'}{\sqrt{a+1 - (\sin t - \cos t)^2}} dt \dots\dots\dots 2p$

deci  $2I = \arcsin \frac{\sin t - \cos t}{\sqrt{a+1}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{a+1}}$ . Așadar  $I = \arcsin \frac{1}{\sqrt{a+1}} = \frac{\pi}{4} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = 1$   
 ..... 3p

Oficiu.....1p

**Problema 2**

Fie  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  inelul claselor de resturi modulo  $n$ ,  $n \geq 2$  și mulțimea

$A(\mathbb{Z}_n) = \{x \in \mathbb{Z}_n \mid x^2 - x + \hat{1} = \hat{0}\}$ .

a) Dacă  $\alpha \in A(\mathbb{Z}_n)$ , demonstrați că  $\alpha$  este inversabil și  $\alpha^{-1} = \alpha^5$ .

b) Dacă mulțimea  $A(\mathbb{Z}_n)$  are un singur element, arătați că  $n = 3$ .

c) Dacă  $n$  este un număr prim de forma  $n = 6k + 5, k \in \mathbb{N}$ , atunci  $A(\mathbb{Z}_n)$  este mulțimea vidă.

*Nicolae Papacu, Slobozia*



### Soluție

a) Fie  $\alpha \in A(\mathbb{Z}_n)$ , atunci  $\alpha^3 + \hat{1} = (\alpha + \hat{1})(\alpha^2 - \alpha + \hat{1}) = \hat{0}$ , adică  $\alpha^3 = -\hat{1}$  și deci  $\alpha^6 = 1$ , ceea ce înseamnă  $\alpha$  este inversabil și  $\alpha^{-1} = \alpha^5$ . ..... 2p

b) Fie  $\alpha \in A(\mathbb{Z}_n)$  singurul element al lui  $\alpha \in A(\mathbb{Z}_n)$ . Din  $\alpha^2 - \alpha + \hat{1} = \hat{0}$ , rezultă  $\alpha(\hat{1} - \alpha) = (\hat{1} - \alpha)\alpha = \hat{1}$ , ceea ce înseamnă că  $\alpha^{-1} = \hat{1} - \alpha$ . Din  $\hat{0} = \alpha^2 - \alpha + \hat{1} = \alpha^2(\hat{1} - \alpha^{-1} + \alpha^{-2})$ , și  $\alpha^2$  inversabil, rezultă  $\alpha^{-2} - \alpha^{-1} + \hat{1} = \hat{0}$ , deci  $\alpha^{-1} \in A(\mathbb{Z}_n)$ . Din unicitate, avem  $\alpha^{-1} = \alpha$ , adică  $\hat{1} - \alpha = \alpha \Leftrightarrow \hat{2}\alpha = \hat{1}$ , de unde  $\hat{2} = \alpha^{-1}$ . Dar  $\alpha^{-1} \in A(\mathbb{Z}_n)$  și atunci  $\hat{4} - \hat{2} + \hat{1} = \hat{0}$ , adică  $\hat{3} = \hat{0}$  și deci  $n=3$  ..... 3p

c) Presupunem că mulțimea  $A(\mathbb{Z}_n)$  are cel puțin un element și fie  $\alpha \in A(\mathbb{Z}_n)$ . Din primul subpunct avem  $\alpha^6 = \hat{1}$ . Cum  $n$  este un număr prim atunci  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$  este corp și prin urmare  $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$  este grup comutativ cu  $n-1$  elemente. Rezultă  $\alpha^{n-1} = \hat{1}$  (Eventual se poate scrie direct din mica teoremă a lui Fermat), deci  $\alpha^{6k+4} = \hat{1}$ . Cum  $\alpha^6 = \hat{1}$ , rezultă  $\hat{1} = \alpha^{6k+4} = \alpha^{6k} \cdot \alpha^4 = \alpha^4$  și  $\hat{1} = \alpha^6 = \alpha^2 \cdot \alpha^4 = \alpha^2$ . Atunci din  $\alpha^2 - \alpha + \hat{1} = \hat{0}$ , rezultă  $\hat{1} - \alpha + \hat{1} = \hat{0}$ , deci  $\alpha = \hat{2}$  și atunci  $\hat{0} = \alpha^2 - \alpha + \hat{1} = \hat{4} - \hat{2} + \hat{1} = \hat{3}$ , ceea ce nu este posibil în  $\mathbb{Z}_n$  pentru  $n = 6k + 5, k \in \mathbb{N}$ . Așadar  $A(\mathbb{Z}_n) = \Phi$ . ..... 4p  
Oficiu.....1p

### Problema 3

Să se arate că  $\frac{49}{36e} \leq \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{e^x + 1} dx \leq \ln \frac{e+1}{2}$ .

Mioara Tudor, Slobozia

### Soluție

Pentru  $x \in [0,1]$ , avem  $e^{x^2} \leq e^x$  și atunci  $\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{e^x + 1} dx \leq \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1) \Big|_0^1 = \ln \frac{e+1}{2}$ . ..... 3p

Folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz în formă integrală, avem că:

$$\left( \int_0^1 \sqrt{e^{x^2}} dx \right)^2 = \left( \int_0^1 \sqrt{\frac{e^{x^2}}{e^x + 1}} \cdot \sqrt{e^x + 1} dx \right)^2 \leq \left( \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{e^x + 1} dx \right) \left( \int_0^1 (e^x + 1) dx \right). \dots\dots 2p$$

Deoarece  $\int_0^1 (e^x + 1) dx = e$ , avem  $e \cdot \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{e^x + 1} dx \geq \left( \int_0^1 e^{\frac{x^2}{2}} \right)^2$ . ..... 1p

Folosind inegalitatea cunoscută  $e^x \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$ , avem  $\int_0^1 e^{\frac{x^2}{2}} dx \geq \int_0^1 \left( 1 + \frac{x^2}{2} \right) dx = \left( x + \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{6}$ .  
..... 2p

Atunci  $\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{e^x + 1} dx \geq \frac{1}{e} \left( \int_0^1 e^{\frac{x^2}{2}} \right)^2 \geq \frac{49}{36e}$ . ..... 1p

Oficiu.....1p



**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024**

**Clasa a XI-a**

**Problema 1**

Fie  $A, B \in M_3(\mathbb{Z})$  două matrice simetrice. Demonstrați că există numerele întregi  $a, b, c$  astfel încât  $(AB - BA)^3 = -(a^2 + b^2 + c^2)(AB - BA)$ .  
(O matrice este simetrică dacă este egală cu transpusa sa)

**Problema 2**

Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  dat prin  $x_1 = 1$  și  $x_{n+1} = \sqrt{(n+1)x_n}$ , pentru orice număr natural  $n \geq 1$ .

a) Arătați că  $x_n < n - 1$  pentru orice  $n \geq 4$ .

b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - n)$ .

**Problema 3**

Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  cu  $a < b$  și  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție neconstantă cu proprietatea lui Darboux.

Demonstrați că, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$ , există  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n \in [a, b]$  cu  $c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n$ , astfel încât numerele  $f(c_0), f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n)$  sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice neconstante.

Gazeta Matematică

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Timp de lucru 3 ore.**

**Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.**



**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024**

**Clasa a XI-a  
Barem de evaluare și notare**

**Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.**

**Problema 1**

Fiie  $A, B \in M_3(\mathbb{Z})$  două matrice simetrice. Demonstrați că există numerele întregi  $a, b, c$  astfel încât  $(AB - BA)^3 = -(a^2 + b^2 + c^2)(AB - BA)$ .  
(O matrice este simetrică dacă este egală cu transpusa sa)

*Rică Zamfir, București*

**Soluție**

Notăm  $C = AB - BA$  și cum  $A^t = A$ ,  $B^t = B$ , avem

$$C^t = (AB - BA)^t = (AB)^t - (BA)^t = B^t A^t - A^t B^t = BA - AB = -C \dots\dots\dots 3p$$

Deci matricea  $C$  este antisimetrică și prin urmare  $a_{ii} = 0$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  și  $a_{ji} = -a_{ij}$ ,  $i < j$ ,

$$i, j \in \{1, 2, 3\}. \text{ Notând } a_{12} = a, a_{13} = b, a_{23} = c, a, b, c \in \mathbb{Z}, \text{ avem } C = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Prin calcul, avem } C^2 = \begin{pmatrix} -a^2 - b^2 & -bc & ac \\ -bc & -a^2 - c^2 & -ab \\ ac & -ab & -b^2 - c^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{și } C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -a(a^2 + b^2 + c^2) & -b(a^2 + b^2 + c^2) \\ a(a^2 + b^2 + c^2) & 0 & -c(a^2 + b^2 + c^2) \\ b(a^2 + b^2 + c^2) & c(a^2 + b^2 + c^2) & 0 \end{pmatrix} = -(a^2 + b^2 + c^2)C \dots\dots\dots 3p$$

**Observație.** Pentru matricea  $AB - BA = C = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ , cum  $trC = tr(AB - BA) = 0$ ,

$\det C = \det C^t = \det(-C) = -\det C$ , adică  $\det C = 0$ ,

$tr(A^*) = \begin{vmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = -(a^2 + b^2 + c^2)$ , atunci folosind formula Cayley – Hamilton

$$C^3 = (trC)C^2 - (trC^*)C + (\det C)I_3, \text{ avem } C^3 = -(a^2 + b^2 + c^2)C.$$

Oficiu .....1p



### Problema 2

Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  dat prin  $x_1 = 1$  și  $x_{n+1} = \sqrt{(n+1)x_n}$ , pentru orice număr natural  $n \geq 1$ .

a) Arătați că  $x_n < n-1$  pentru orice  $n \geq 4$ .

b) Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - n)$ .

Marin Ionescu, Pitești

### Soluție

a) Se demonstrează prin inducție că  $x_n < n-1$ ,  $\forall n \geq 4$ :  $x_4^4 = 48\sqrt{2} < 81 = 3^4$ ,

$$x_{k+1} = \sqrt{(k+1)x_k} \leq \sqrt{(k+1)(k-1)} = \sqrt{k^2-1} < k, \quad k \geq 4. \dots\dots\dots 2p$$

b) Se demonstrează prin inducție că  $x_n \geq n-2$ ,  $\forall n \geq 4$ :  $x_4^4 = 48\sqrt{2} > 16 = 2^4$ ,

$$x_{k+1} = \sqrt{(k+1)x_k} \geq \sqrt{(k+1)(k-2)} = \sqrt{k^2-k-2} > \sqrt{k^2-4k+4} = k-2, \quad k \geq 4.$$

Din  $n-2 \leq x_n \leq n-1$ , rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 1$ .  $\dots\dots\dots 2p$

Cum  $x_n < n-1$  pentru orice  $n \geq 4$ , rezultă că  $x_n < n-1$  pentru orice  $n \geq 6$ .

Se demonstrează prin inducție că  $x_n \geq n-1-\frac{6}{n}$ ,  $\forall n \geq 6$ :

$$x_6 = \sqrt{6\sqrt{5\sqrt{4\sqrt{3\sqrt{2}}}}} = \sqrt{6\sqrt{5 \cdot 2\sqrt{3\sqrt{2}}}} > \sqrt{6\sqrt{10}} > \sqrt{6 \cdot 3} > 4 = 5 - \frac{6}{6},$$

$$x_{k+1}^2 = (k+1)x_k \geq (k+1)\left(k-1-\frac{6}{k}\right) = k^2-1-\frac{6(k+1)}{k} = k^2-7-\frac{6}{k} \geq k^2-8. \text{ Arătăm că}$$

$$k^2-8 \geq \left(k-\frac{6}{k+1}\right)^2 \Leftrightarrow k^2-8 \geq k^2-\frac{12k}{k+1}+\frac{36}{(k+1)^2} \Leftrightarrow \frac{4k-8}{k+1} \geq \frac{36}{(k+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k-2 \geq \frac{9}{k+1} \Leftrightarrow (k-2)(k+1) \geq 9, \text{ adevărată pentru că } (k-2)(k+1) \geq 4 \cdot 7 \geq 9, \text{ pentru } k \geq 6.$$

Deci  $x_{k+1} \geq k - \frac{6}{k+1}$ .  $\dots\dots\dots 4p$

Așadar  $n-1-\frac{6}{n} \leq x_n \leq n-1$ , adică  $-1-\frac{6}{n} \leq x_n - n \leq -1$  și atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - n) = -1$ .  $\dots\dots\dots 1p$

Oficiu  $\dots\dots\dots 1p$

### Problema 3

Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  cu  $a < b$  și  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție neconstantă cu proprietatea lui Darboux.

Demonstrați că, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$ , există  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n \in [a, b]$  cu  $c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n$ , astfel încât numerele  $f(c_0), f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n)$  sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice neconstante.

Dan Ștefan Marinescu, Hunedoara, G.M. 12/2023



**Soluție**

Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$ . Cum funcția  $f$  nu este constantă, atunci există  $x, y \in [a, b]$ ,  $x \neq y$  astfel încât  $f(x) \neq f(y)$ . Notăm  $c_0 = \min(x, y)$  și  $c_n = \max(x, y)$ . ..... 1p

Fie  $r = \frac{f(c_n) - f(c_0)}{n}$  și numerele  $\lambda_k = f(c_0) + k \cdot r$ ,  $k \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ .

Se constată ușor că numerele  $f(c_0), \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, f(c_n)$  sunt în progresie aritmetică cu rația

$r = \frac{f(c_n) - f(c_0)}{n}$ . ..... 3p

Deoarece  $\lambda_1$  se află între  $f(c_0)$  și  $f(c_n)$  și  $f$  are proprietatea Darboux (PD), atunci există

$c_1 \in (c_0, c_n)$  astfel încât  $f(c_1) = \lambda_1$ . ..... 2p

Cum numărul  $\lambda_2$  se află între  $\lambda_1 = f(c_1)$  și  $f(c_n)$  și  $f$  are PD, atunci există  $c_2 \in (c_1, c_n)$  astfel încât  $f(c_2) = \lambda_2$ . ..... 1p

Inductiv, ajungem că numărul  $\lambda_{n-1}$  se află între  $\lambda_{n-2} = f(c_{n-2})$  și  $f(c_n)$  și cum  $f$  are PD, atunci există  $c_{n-1} \in (c_{n-2}, c_n)$  astfel încât  $f(c_{n-1}) = \lambda_{n-1}$ .

Numerele aflate astfel,  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  au proprietatea din enunțul problemei. .... 2p

Oficiu ..... 1p



**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024**

**Clasa a X-a**

**Problema 1.**

Pentru un număr natural nenul  $p$ , notăm  $a_p = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot p^p$  și  $s_p = 1 + 2 + \dots + p$ . Să se arate că

$$\left[ 1 + \frac{\sqrt[s_2]{a_2}}{1+2^2} + \frac{\sqrt[s_3]{a_3}}{1+2^2+3^2} + \dots + \frac{\sqrt[s_n]{a_n}}{1+2^2+3^2+\dots+n^2} \right] = 1, \text{ unde } n \text{ este un număr natural nenul.}$$

( $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ .)

**Problema 2.**

Fie ecuația  $2^{2^x} = 4x^2$  cu  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Rezolvați ecuația în mulțimea  $(0, \infty)$ .

b) Arătați că ecuația are o soluție unică pe intervalul  $(-\infty, 0)$  și precizați un interval de lungime  $\frac{1}{4}$  în care se află această soluție.

**Problema 3.**

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție cu proprietățile:

i)  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ ;

ii) Există un cel mai mic număr strict pozitiv  $a$ , cu proprietatea că  $f(a) = \max f > 0$ , unde  $\max f$  reprezintă valoarea maximă a funcției  $f$ .

Arătați că  $f$  este o funcție periodică cu perioada  $a$ .

Dați exemplu de o funcție care verifică proprietățile i) și ii).

*Gazeta Matematică*

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Timp de lucru 3 ore.**

**Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.**



**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024**

**Clasa a X-a  
Barem de evaluare și notare**

**Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.**

**Problema 1.**

Pentru un număr natural nenul  $p$ , notăm  $a_p = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot p^p$  și  $s_p = 1 + 2 + \dots + p$ . Să se arate că  $\left[ 1 + \frac{\sqrt[p_2]{a_2}}{1+2^2} + \frac{\sqrt[p_3]{a_3}}{1+2^2+3^2} + \dots + \frac{\sqrt[p_n]{a_n}}{1+2^2+3^2+\dots+n^2} \right] = 1$ , unde  $n$  este un număr natural

nenul.

( $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ .)

*Dorin Mărghidanu, Corabia*

**Soluție**

Evident pentru  $n = 1$ , răspunsul este 1. .... 1p

Pentru  $n \geq 2$ , folosind inegalitatea mediilor pentru  $s_p = \frac{p(p+1)}{2}$  numere, avem

$$\sqrt[p]{a_p} = \sqrt[p]{1 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot \dots \cdot (p \cdot p \cdot \dots \cdot p)} < \frac{1 + (2+2) + (3+3+3) + \dots + (p+p+\dots+p)}{s_p}, \text{ adică}$$

$$\sqrt[p]{a_p} < \frac{1 + 2^2 + 3^2 + \dots + p^2}{s_p} \dots \dots \dots 3p$$

Așadar  $\frac{\sqrt[p]{a_p}}{1 + 2^2 + 3^2 + \dots + p^2} < \frac{1}{s_p} = \frac{2}{p(p+1)}$ , rezultă atunci că

$$1 + \sum_{p=2}^n \frac{\sqrt[p]{a_p}}{1 + 2^2 + 3^2 + \dots + p^2} < \sum_{p=1}^n \frac{2}{p(p+1)} = 2 \sum_{p=1}^n \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = 2 \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) < 2, \dots \dots \dots 3p$$

Cum  $1 + \sum_{p=2}^n \frac{\sqrt[p]{a_p}}{1 + 2^2 + 3^2 + \dots + p^2} > 1$ , rezultă că  $\left[ 1 + \frac{\sqrt[p_2]{a_2}}{1+2^2} + \frac{\sqrt[p_3]{a_3}}{1+2^2+3^2} + \dots + \frac{\sqrt[p_n]{a_n}}{1+2^2+3^2+\dots+n^2} \right] = 1$ ,

pentru  $n \geq 2$ , rezultat care rămâne valabil și pentru  $n = 1$ .

..... 2p  
Oficiu ..... 1p

**Problema 2.**

Fie ecuația  $2^{2^x} = 4x^2$  cu  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Rezolvați ecuația în mulțimea  $(0, \infty)$ .

b) Arătați că ecuația are o soluție unică pe intervalul  $(-\infty, 0)$  și precizați un interval de lungime  $\frac{1}{4}$  în care se află această soluție.

*Marcel Popescu, Slobozia*



### Soluție

a) Fie  $x \in (0, \infty)$ , atunci ecuația se scrie  $\log_2 2^{2^x} = \log_2 (4x^2)$ , ecuație care este echivalentă cu ecuația  $2^x = 2 + 2\log_2 x$  sau  $f(x) = g(x)$ , unde  $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2^x$ ,  $g(x) = 2 + 2\log_2 x$ . Deoarece funcția  $f$  este convexă iar funcția  $g$  este concavă, atunci ecuația  $f(x) = g(x)$  are cel mult două soluții pe  $(0, \infty)$ . ..... 2p

Cum  $f(1) = g(1) = 2$  și  $f(2) = g(2) = 4$ , atunci ecuația  $f(x) = g(x)$ , deci și ecuația  $2^{2^x} = 4x^2$ , are pe  $(0, \infty)$  doar soluțiile  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ . ..... 2p

b) Pentru  $x \in (-\infty, 0)$ , avem  $\log_2 x^2 = 2\log_2 (-x)$ . În aceste condiții ecuația din enunț este echivalentă cu ecuația  $2^x = 2 + 2\log_2 (-x)$  sau  $h(x) = 0$ , unde  $h : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = 2^x - 2 - 2\log_2 (-x)$ . De asemenea  $h(x) = h_1(x) - h_2(x)$ , unde  $h_1, h_2 : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_1(x) = 2^x - 2$ ,  $h_2(x) = 2\log_2 (-x)$  și cum funcția  $h_1$  este strict crescătoare iar funcția  $h_2$  este strict descrescătoare, rezultă că funcția  $h = h_1 - h_2$  este strict crescătoare. Prin urmare ecuația  $h(x) = 0$  are cel mult o soluție pe  $(-\infty, 0)$ . ..... 3p

Avem  $h(-1) = -\frac{3}{2} < 0$  și  $h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ , deci ecuația  $h(x) = 0$  are exact o soluție pe  $(-\infty, 0)$ , notată  $x_0$ . ..... 1p

Mai mult, cum  $\log_2 3 > \frac{3}{2}$ , atunci  $h\left(-\frac{3}{4}\right) = 2^{-\frac{3}{4}} - 2 - 2\log_2 \frac{3}{4} = 2^{-\frac{3}{4}} + 2 - 2\log_2 3 < 2^{-\frac{3}{4}} - 1 < 0$ , ceea

ce înseamnă că  $x_0 \in \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ , adică soluția se găsește într-un interval de lungime  $\frac{1}{4}$ . ..... 1p

Oficiu ..... 1p

### Problema 3

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție cu proprietățile:

i)  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ ;

ii) Există un cel mai mic număr strict pozitiv  $a$ , cu proprietatea că  $f(a) = \max f > 0$ , unde  $\max f$  reprezintă valoarea maximă a funcției  $f$ .

Arătați că  $f$  este o funcție periodică cu perioada  $a$ .

Dați exemplu de o funcție care verifică proprietățile i) și ii).

Marius Dolcan, Deva, GM 12/2023

### Soluție

Avem  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$  (1)

oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ .

În (1)  $x = y = 0 \Rightarrow 2f(0) = 2f^2(0)$ , de unde  $f(0) \in \{0, 1\}$ .

Dacă  $f(0) = 0$ , luăm  $y = 0$  în (1) și obținem  $2f(x) = 2f(x)f(0) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , adică  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , contradicție cu  $f(a) = \max f > 0$ . Așadar  $f(0) = 1$ . ..... 2p

În (1) facem  $x = y$  și atunci pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , avem



$$f(2x)+1=2f^2(x) \quad (2)$$

În (2) luăm  $x = a$  și cum  $f(2a) \leq f(a) = \max f$ , avem  $2f^2(a) = f(2a)+1 \leq f(a)+1$ , de unde  $f(a) \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ . Deoarece  $f(a) = \max f > 0$ ,  $f(0) = 1$ , rezultă că  $f(a) = 1$ .

..... 2p

În (2) luăm  $x = \frac{a}{2}$  și avem  $f(a)+1 = 2f^2\left(\frac{a}{2}\right)$ . Deoarece  $f(a) = 1$ , obținem  $f\left(\frac{a}{2}\right) \in \{-1, 1\}$ . Cum  $a$  este cel mai mic număr strict pozitiv pentru care  $f(a) = \max f = 1$ , rezultă că  $f\left(\frac{a}{2}\right) = -1$ .

..... 1p

În (2), facem  $x = \frac{a}{4}$  și obținem  $0 = f\left(\frac{a}{2}\right)+1 = 2f^2\left(\frac{a}{4}\right)$ , adică  $f\left(\frac{a}{4}\right) = 0$

În (1) facem  $y = \frac{a}{4}$  și obținem  $f\left(x+\frac{a}{4}\right)+f\left(x-\frac{a}{4}\right) = 2f(x)f\left(\frac{a}{4}\right) = 0$ , adică

$f\left(x+\frac{a}{4}\right) = -f\left(x-\frac{a}{4}\right)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  sau notând  $t = x - \frac{a}{4}$ , avem  $f\left(t+\frac{a}{2}\right) = -f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  și atunci

$f(t+a) = f\left(\left(t+\frac{a}{2}\right)+\frac{a}{2}\right) = -f\left(t+\frac{a}{2}\right) = f(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , ceea ce înseamnă că  $a$  este perioadă a

funcției  $f$ . ..... 2p

Un exemplu de funcție este  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x$ , iar  $a = 2\pi$  ..... 2p

Oficiu ..... 1p



**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024**

**Clasa a IX-a**

**Problema 1.**

Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  o progresie aritmetică de numere naturale. Notăm  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ,  $n \geq 1$ .  
Arătați că

$$\sqrt{s_n^2 + a_1(a_1 + n)(a_1 + a_n)^2} + \sqrt{s_n^2 + a_1(a_1 - n)(a_1 + a_n)^2} \in \mathbb{N}.$$

Gazeta Matematică

**Problema 2.**

Fie triunghiul  $ABC$  cu  $G$  centrul său de greutate și punctul  $M$  din interiorul triunghiului,  $M \neq G$ . Se construiesc punctele  $M_A$ ,  $M_B$ ,  $M_C$  simetricele lui  $M$  față de mijloacele laturilor  $(BC)$ ,  $(CA)$ , respectiv  $(AB)$ .

- a) Arătați că dreptele  $AM_A$ ,  $BM_B$  și  $CM_C$  sunt concurente într-un punct notat cu  $T$ .
- b) Dacă  $G_1$  este centrul de greutate al triunghiului  $M_A M_B M_C$ , arătați că punctele  $M, G, T, G_1$  sunt coliniare,  $G$  este mijlocul lui  $(MG_1)$  și  $T$  este mijlocul lui  $(GG_1)$ .

**Problema 3.**

Fie  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  o funcție monotonă care pentru orice număr natural nenul  $n$ , verifică relația  $f(f(n)) = n + f(1)$ .

- a) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare;
- b) Să se determine funcția  $f$ .

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Timp de lucru 3 ore.**

**Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.**



**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024**

**Clasa a IX-a  
Barem de evaluare și notare**

**Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.**

**Problema 1**

Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  o progresie aritmetică de numere naturale. Notăm  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ,  $n \geq 1$ . Arătați că  $\sqrt{s_n^2 + a_1(a_1+n)(a_1+a_n)^2} + \sqrt{s_n^2 + a_1(a_1-n)(a_1+a_n)^2} \in \mathbb{N}$ .

*Florin Rotaru, Focșani, G.M. 1/2024*

**Soluție**

Avem  $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$  și atunci

$$\begin{aligned} \sqrt{s_n^2 + a_1(a_1+n)(a_1+a_n)^2} &= \sqrt{\frac{n^2(a_1+a_n)^2}{4} + a_1(a_1+n)(a_1+a_n)^2} = \\ &= \frac{(a_1+a_n)}{2} \sqrt{n^2 + 4a_1(a_1+n)} = \frac{(a_1+a_n)}{2} \sqrt{(2a_1+n)^2} \dots\dots\dots 2p \end{aligned}$$

Așadar  $\sqrt{s_n^2 + a_1(a_1+n)(a_1+a_n)^2} = \frac{(a_1+a_n)|2a_1+n|}{2} = \frac{(a_1+a_n)(2a_1+n)}{2} \dots\dots\dots 1p$

Analog  $\sqrt{s_n^2 + a_1(a_1-n)(a_1+a_n)^2} = \frac{(a_1+a_n)|2a_1-n|}{2} \dots\dots\dots 3p$

Avem

$$E = \sqrt{s_n^2 + a_1(a_1+n)(a_1+a_n)^2} + \sqrt{s_n^2 + a_1(a_1-n)(a_1+a_n)^2} = \frac{(a_1+a_n)(2a_1+n)}{2} + \frac{(a_1+a_n)|2a_1-n|}{2} \text{ și}$$

atunci  $E = 2a_1(a_1+a_n)$  sau  $E = n(a_1+a_n)$ , deci  $E \in \mathbb{N}$ .  $\dots\dots\dots 3p$

Oficiu  $\dots\dots\dots 1p$

**Problema 2**

Fie triunghiul  $ABC$  cu  $G$  centrul său de greutate și punctul  $M$  din interiorul triunghiului,  $M \neq G$ . Se construiesc punctele  $M_A, M_B, M_C$  simetricele lui  $M$  față de mijloacele laturilor  $(BC), (CA)$ , respectiv  $(AB)$ .

a) Arătați că dreptele  $AM_A, BM_B$  și  $CM_C$  sunt concurente într-un punct notat cu  $T$ .

\*\*\*

b) Dacă  $G_1$  este centrul de greutate al triunghiului  $M_A M_B M_C$ , arătați că punctele  $M, G, T, G_1$  sunt coliniare,  $G$  este mijlocul lui  $(MG_1)$  și  $T$  este mijlocul lui  $(GG_1)$ .

*Nicolae Papacu, Slobozia*

**Soluție**

a) Fie  $A_1, B_1, C_1$  mijloacele laturilor  $(BC), (CA), (AB)$ . Deoarece  $A_1 B_1$  este linie mijlocie în triunghiurile  $CAB$  și  $MM_A M_B$  rezultă că  $AB \parallel M_B M_A$  și  $(AB) \equiv (M_B M_A)$ .



Deci  $ABM_A M_B$  este paralelogram și atunci diagonalele sale au același mijloc. Notăm cu  $\{T\} = AM_A \cap BM_M$ . Analog se arată că  $T$  este mijlocul lui  $CM_C$  ..... 2p

**b) Soluția 1.** Fie  $A_1$  mijlocul lui  $(BC)$ . Deoarece  $T$  este mijlocul lui  $(AM_A)$ , avem

$$\overrightarrow{MT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MM_A}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + 2 \cdot \overrightarrow{MA_1}). \text{ Din } \frac{AG}{GA_1} = 2, \text{ rezultă că } \overrightarrow{MG} = \frac{\overrightarrow{MA} + 2 \cdot \overrightarrow{MA_1}}{3} \text{ și imediat}$$

$$\overrightarrow{MG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{MT} \quad (1)$$

Deci punctele  $M, G, T$  sunt coliniare..... 3p

Cum  $G_1$  este centrul de greutate al triunghiului  $M_A M_B M_C$ , folosind relația lui Leibniz, avem

$$3\overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{GM_A} + \overrightarrow{GM_B} + \overrightarrow{GM_C}. \text{ Avem } \overrightarrow{GM_A} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM_A} \text{ și atunci}$$

$$3\overrightarrow{GG_1} = \sum \overrightarrow{GM_A} = \sum (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM_A}) = \sum \overrightarrow{AM_A}, \text{ deoarece } \sum \overrightarrow{GA} = \vec{0} \text{ (} G \text{ este centrul de greutate al}$$

triunghiului  $ABC$ ). Avem  $\overrightarrow{AM_A} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM_A} = \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ . Atunci

$$3\overrightarrow{GG_1} = \sum \overrightarrow{AM_A} = \sum (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \sum \overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG}, \text{ (formula lui Leibniz pentru triunghiul } ABC \text{) deci}$$

$$\overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{MG} \quad (2)$$

Ceea ce înseamnă că punctele  $M, G, G_1$  sunt coliniare (deci  $M, G, T, G_1$  sunt coliniare) și  $G$  este mijlocul lui  $(MG_1)$ . ..... 3p

Din (1) și (2), avem  $3\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MT} = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GT}) \Rightarrow 2\overrightarrow{GT} = \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{GT} + \overrightarrow{TG_1}$ , deci

$\overrightarrow{GT} = \overrightarrow{TG_1}$  ceea ce înseamnă că  $T$  este mijlocul lui  $(GG_1)$ ..... 1p

**b) Soluția 2.** Folosim vectorii de poziție în rezolvarea acestui subpunct. De la a) avem

$$\vec{r}_T = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_{M_A}}{2} \text{ și cum } \vec{r}_M + \vec{r}_{M_A} = \vec{r}_B + \vec{r}_C, \text{ avem } \vec{r}_T = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C - \vec{r}_M), \text{ relație care, ținând cont de}$$

vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi, devine  $\vec{r}_T = \frac{1}{2}(3 \cdot \vec{r}_G - \vec{r}_M)$ , sau

$$2\vec{r}_T = 3 \cdot \vec{r}_G - \vec{r}_M \Leftrightarrow 2(\vec{r}_T - \vec{r}_G) = \vec{r}_G - \vec{r}_M, \text{ sau } 2\overrightarrow{GT} = \overrightarrow{MG}, \text{ ceea ce înseamnă că punctele } M, G, T \text{ sunt coliniare. .... 3p}$$

$$\text{Avem } \vec{r}_{G_1} = \frac{1}{3}(\vec{r}_{M_A} + \vec{r}_{M_B} + \vec{r}_{M_C}) = \frac{1}{3}(\sum (\vec{r}_B + \vec{r}_C - \vec{r}_M)) = \frac{1}{3}(2\sum \vec{r}_A - 3\vec{r}_M) = 2\vec{r}_G - \vec{r}_M, \text{ sau}$$

$$\vec{r}_{G_1} - \vec{r}_G = \vec{r}_G - \vec{r}_M \Leftrightarrow \overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{MG}, \text{ ceea ce înseamnă că punctele } M, G, G_1 \text{ sunt coliniare și } G \text{ este mijlocul lui } (MG_1). \text{ ..... 3p}$$

Rezultă atunci că punctele  $M, G, T, G_1$  sunt coliniare.

Din (1) și (2), avem  $2\overrightarrow{GT} = \overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{GT} + \overrightarrow{TG_1}$ , adică  $\overrightarrow{GT} = \overrightarrow{TG_1}$ , ceea ce înseamnă că  $T$  este mijlocul lui  $(GG_1)$ . ..... 1p

Oficiu ..... 1p



### Problema 3

Fie  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  o funcție monotonă care pentru orice număr natural nenul  $n$ , verifică relația:  
 $f(f(n)) = n + f(1)$ .

- a) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare;
- b) Să se determine funcția  $f$ .

Nicolae Papacu, Slobozia

### Soluție.

Avem

$$f(f(n)) = n + f(1), \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

Dacă aplicăm  $f$  relației (1), avem  $f(f(f(n))) = f(n + f(1))$  și înlocuind tot în (1)  $n$  cu  $f(n)$ , avem  $f(f(f(n))) = f(n) + f(1)$ . Deci

$$f(n + f(1)) = f(n) + f(1), \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

..... 1p  
a) Demonstrăm întâi că funcția este strict monotonă. Dacă prin absurd,  $f$  nu este strict monotonă, atunci  $\exists n, p \in \mathbb{N}^*, n \neq p$ , astfel încât  $f(n) = f(p)$ . Atunci  $f(f(n)) = f(f(p))$  și deci  $n + f(1) = p + f(1)$ , ceea ce este o contradicție cu  $n \neq p$ . Deci  $f$  este strict monotonă.

Demonstrăm în continuare că  $f$  este strict crescătoare. Presupunem prin absurd că  $f$  nu este strict crescătoare. Cum  $f$  este strict monotonă, atunci  $f$  este strict descrescătoare și atunci  $f(n + f(1)) - f(n) < 0$  și ținând cont de (2), rezultă că  $f(1) < 0$ , ceea ce este o contradicție.

Așadar funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{N}^*$ . ..... 3p

b). Cum  $f(n+1) > f(n)$ ,  $f(n), f(n+1)$  numere naturale, atunci  $f(n+1) \geq f(n) + 1$  și atunci

$$\sum_{k=0}^{m-1} (f(n+k+1) - f(n+k)) \geq \sum_{k=0}^{m-1} 1, \text{ adică } f(n+m) - f(n) \geq m, \text{ deci}$$

$$f(n+m) \geq f(n) + m, \forall m, n \in \mathbb{N}^* \quad (3)$$

Fie  $p = f(1)$ , atunci relația (2) se scrie:

$$f(n+p) = f(n) + p \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (4)$$

..... 2p  
Dacă în relația din enunț, facem  $n = 1$ , obținem  $f(f(1)) = 1 + p$ , adică

$$f(p) = 1 + p \quad (5)$$

Cum  $f(p) = 1 + p > p = f(1)$ , atunci  $p > 1$  și folosind relațiile (1) și (3), avem

$p + 1 = f(p) = f(1 + (p - 1)) \geq f(1) + p - 1 = 2p - 1$ , de unde  $p \leq 2$ . Din  $p > 1$  și  $p \leq 2$ , rezultă  $p = 2$ , deci  $f(1) = 2$ . Imediat din (5), obținem  $f(2) = 3$ , iar (4) devine

$$f(n+2) = f(n) + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (6)$$

Prin inducție se demonstrează că pentru orice  $n, k \in \mathbb{N}^*$ , are loc relația:

$$f(n+2k) = f(n) + 2k \quad (4)$$

Imediat  $f(1+2k) = 2 + 2k$  și  $f(2+2k) = 3 + 2k$ , deci  $f(n) = n + 1$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . ... 3p

Oficiu ..... 1p



**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024**

**Clasa a VIII-a**

**Problema 1**

Fie  $n$  un număr natural nenul și  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{-1, 1\}$ . Arătați că dacă

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n = 0,$$

atunci  $n$  este pătrat perfect.

**Problema 2**

Aflați  $n \in \mathbb{N}$  pentru care

$$2 \cdot \left[ \frac{1^2}{2} \right] + 2^2 \cdot \left[ \frac{2^2}{3} \right] + \dots + 2^n \cdot \left[ \frac{n^2}{n+1} \right] = 2^{2025} \cdot 2022 + 4,$$

unde  $[x]$  este partea întreagă a numărului real  $x$ .

Gazeta Matematică

**Problema 3**

Fie cubul  $ABCD A' B' C' D'$  cu  $AB = \sqrt{2}$  cm. În interiorul bazei  $ABCD$  se consideră punctul  $M$  astfel încât  $\angle MCD = \angle MDC = 30^\circ$ .

- a) Demonstrați că distanța de la punctul  $M$  la planul  $(ABC')$  este mai mică decât  $\frac{3}{4}$  cm.
- b) Calculați sinusul unghiului format de planele  $(MD'C')$  și  $(MA'B')$ .

**Toate subiectele sunt obligatorii.  
Timp de lucru 3 ore.**



Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.

**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024**

**Clasa a VIII-a**

**Bareme de evaluare și notare**

**Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem se acordă punctaj maxim.**

**Problema 1**

Fie  $n$  un număr natural nenul și  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{-1, 1\}$ . Arătați că dacă

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots + x_2x_n + \dots + x_{n-1}x_n = 0,$$

atunci  $n$  este pătrat perfect.

**Soluție**

Dacă  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{-1, 1\}$ , atunci termenii sumei sunt egali cu 1 sau -1.

Pentru ca suma lor să fie egală cu 0, trebuie ca jumătate din ei să fie +1 și cealaltă jumătate să fie -1.....2p

Numărul termenilor sumei este  $\frac{n(n-1)}{2}$  și astfel vom avea  $\frac{n(n-1)}{4}$  termeni egali cu +1

și  $\frac{n(n-1)}{4}$  termeni egali cu -1 (1).....2p

Considerăm că numărul elementelor  $x_i$  egale cu -1 este  $k$ , de unde rezultă că numărul celor egale cu +1 este  $n - k$  .....2p

Numărul termenilor de forma  $x_i x_j$  egali cu -1 va fi  $k(n-k)$  și, folosind relația (1), se obține

egalitatea  $k(n-k) = \frac{n(n-1)}{4} \Leftrightarrow kn - k^2 = \frac{n^2 - n}{4} \Leftrightarrow 4kn - 4k^2 = n^2 - n$  .....2p

Relația este echivalentă cu  $4k^2 - 4kn + n^2 = n$ , de unde se obține  $n = (2k - n)^2$  .....1p

Oficiu.....1p

**Problema 2**

Aflați  $n \in \mathbb{N}^*$  pentru care

$$2 \cdot \left[ \frac{1^2}{2} \right] + 2^2 \cdot \left[ \frac{2^2}{3} \right] + \dots + 2^n \cdot \left[ \frac{n^2}{n+1} \right] = 2^{2025} \cdot 2022 + 4,$$

unde  $[x]$  este partea întreagă a numărului real  $x$ .

**Soluție**

$$\left[ \frac{k^2}{k+1} \right] = \left[ \frac{k^2 - 1 + 1}{k+1} \right] = \left[ \frac{(k-1)(k+1) + 1}{k+1} \right] = \left[ k - 1 + \frac{1}{k+1} \right] = k - 1, \forall k \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 3p$$

Ecuția se rescrie  $2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 2 + \dots + 2^n \cdot (n-1) = 2^{2025} \cdot 2022 + 4 \dots\dots\dots 1p$

$$2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 2 + \dots + 2^n \cdot (n-1) = 2^{n+1}(n-1) - (2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) = 2^{n+1}(n-1) - 2^{n+1} + 4 \dots\dots\dots 3p$$

Ecuția devine  $2^{n+1}(n-1) - 2^{n+1} + 4 = 2^{2025} \cdot 2022 + 4$

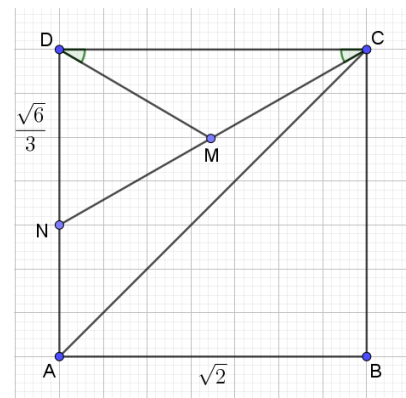
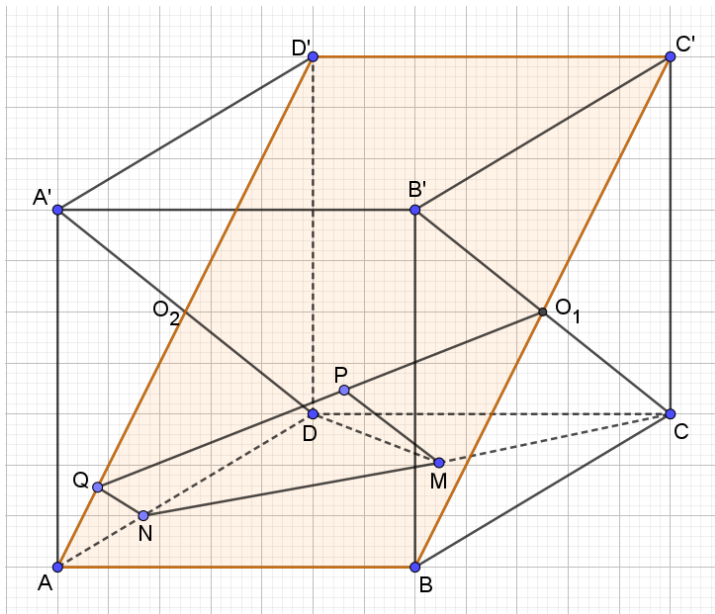
$$2^{n+1}(n-2) = 2^{2025} \cdot 2022 \Leftrightarrow n = 2024 \dots\dots\dots 2p$$

Oficiu..... 1p

**Problema 3**

Fie cubul  $ABCD A' B' C' D'$  cu  $AB = \sqrt{2}$  cm . În interiorul bazei  $ABCD$  se consideră punctul  $M$  astfel încât  $\angle MCD = \angle MDC = 30^\circ$  .

- a) Demonstrați că distanța de la punctul  $M$  la planul  $(ABC')$  este mai mică decât  $\frac{3}{4}$  cm.
- b) Calculați sinusul unghiului format de planele  $(MD' C')$  și  $(MA' B')$  .





### Soluție

a) Fie  $CM \cap AD = \{N\}$ ,  $O_1$  centrul pătratului  $BCC'B'$ ,  $O_2$  centrul pătratului  $ADD'A$

$DO_2 \perp (ABC')$ ,  $NQ \perp AD'$ ,  $Q \in AD'$ ,  $NQ \parallel DO_2 \Rightarrow NQ \perp (ABC')$ .....1p

$CO_1 \perp (ABC')$ ,  $NQ \perp (ABC')$ ,  $C, M, N$  coliniare  $\Rightarrow$  proiecțiile lor pe planul  $(ABC')$  sunt coliniare și dacă  $MP \perp (ABC')$ , atunci  $O_1, P, Q$  sunt coliniare și  $CO_1 \parallel MP \parallel NQ$ .....1p

Triunghiul  $CDM$  este isoscel, cu unghiurile de la bază egale cu  $30^\circ$ . În triunghiul  $CDN$  dreptunghic și cu unghiul  $C$  cu măsura de  $30^\circ$ , se demonstrează că triunghiul  $DMN$  este echilateral cu latura  $DN = \frac{\sqrt{6}}{3}$  cm și  $M$  este mijlocul laturii  $NC$ .....1p

În trapezul  $CNQQ_1$ ,  $MP$  este linie mijlocie și  $MP = \frac{CO_1 + NQ}{2}$ ,  $CO_1 = 1$  cm

$$\triangle ANQ \sim \triangle ADO_2 \Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{NQ}{DO_2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{NQ}{1} \Rightarrow NQ = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \dots\dots\dots 2p$$

$$MP = \frac{1 + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6} < \frac{3}{4} \dots\dots\dots 1p$$

b)  $(MA'B') \cap (MD'C') = ST$ ,  $S \in AD$ ,  $T \in BC$  și  $S, M, T$  coliniare

Triunghiurile  $MA'B'$  și  $MC'D'$  sunt isoscele iar  $MR$  și  $MG$  sunt mediane și înălțimi în aceste triunghiuri

$$MR \perp A'B', A'B' \parallel ST \Rightarrow MR \perp ST, MG \perp D'C', D'C' \parallel ST \Rightarrow MG \perp ST \dots\dots\dots 2p$$

$$\sphericalangle((MA'B'), (MD'C')) = \sphericalangle(MR, MG) = \sphericalangle(RMG)$$

$$A_{\triangle RMG} = 1 \text{ cm}^2, A_{\triangle RMG} = \frac{MR \cdot MG \cdot \sin RMG}{2} \Rightarrow \sin RMG = \frac{2}{MR \cdot MG} \dots\dots\dots 1p$$

Oficiu.....1p



**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024**

**Clasa a VII-a**

**Problema 1**

Să se arate că:

a)  $N = \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{7-2\sqrt{12}} + \dots + \sqrt{199-2\sqrt{9900}}$  este număr natural.

b)  $3\sqrt{a^2+1} + 2\sqrt{a^2+2} + \sqrt{a^2+3} \leq \frac{3a^2+20}{2}, \forall a \in \mathbb{R}.$

**Problema 2**

Se consideră numerele naturale nenule  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$ , cu  $n \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât

$$2 \left( \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{2}{a_2 a_3} + \frac{3}{a_3 a_4} + \dots + \frac{n}{a_n a_{n+1}} \right) \geq n(n+1).$$

Calculați  $\sqrt{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n+1}} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1})^{-2}$ .

Gazeta Matematică

**Problema 3**

Fie  $\triangle ABC$  cu lungimile laturilor  $BC = a, AC = b, AB = c$  astfel încât  $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$ . Dacă  $[AD]$  este bisectoarea unghiului  $BAC$ ,  $D \in BC$ ,  $M$  este mijlocul laturii  $AC$  și  $ME \parallel AD, E \in BC$ , să se calculeze ce procent din aria triunghiului  $ABC$  reprezintă aria triunghiului  $MEC$ .

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Timp de lucru 3 ore.**

**Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.**



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024

Clasa a VII-a  
Barem de evaluare și notare

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.

**Problema 1**

Să se arate că:

a)  $N = \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{7-2\sqrt{12}} + \dots + \sqrt{199-2\sqrt{9900}}$  este număr natural.

b)  $3\sqrt{a^2+1} + 2\sqrt{a^2+2} + \sqrt{a^2+3} \leq \frac{3a^2+20}{2}, \forall a \in \mathbb{R}.$

Mioara Tudor

**Soluție**

a)  $\sqrt{k+k+1-2\sqrt{k(k+1)}} = \sqrt{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})^2} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$  pentru orice  $k \in \{1, 2, 3, \dots, 99\}$  .....3p

Atunci  $N = \sqrt{2}-\sqrt{1} + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \dots + \sqrt{100}-\sqrt{99} = \sqrt{100}-\sqrt{1} = 10-1 = 9 \in \mathbb{N}$  .....2p

b) Relația este echivalentă cu  $(\sqrt{a^2+1}-3)^2 + (\sqrt{a^2+2}-2)^2 + (\sqrt{a^2+3}-1)^2 \geq 0$  .....4p

Oficiu.....1p

**Problema 2**

Se consideră numerele naturale nenule  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$ , cu  $n \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât

$2\left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{2}{a_2 a_3} + \frac{3}{a_3 a_4} + \dots + \frac{n}{a_n a_{n+1}}\right) \geq n(n+1)$ . Calculați  $\sqrt{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n+1}} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1})^{-2}$ .

Gheorghe Molea, G. M. 1/2024

**Soluție**

Cum  $a_k \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\} \Rightarrow a_k a_{k+1} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{a_k a_{k+1}} \leq 1 \Rightarrow \frac{k}{a_k a_{k+1}} \leq k$  .....3p

Atunci  $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{2}{a_2 a_3} + \frac{3}{a_3 a_4} + \dots + \frac{n}{a_n a_{n+1}} \leq 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$  .....2p

Dar  $2 \left( \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{2}{a_2 a_3} + \frac{3}{a_3 a_4} + \dots + \frac{n}{a_n a_{n+1}} \right) \geq n(n+1)$ , deci

$2 \left( \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{2}{a_2 a_3} + \frac{3}{a_3 a_4} + \dots + \frac{n}{a_n a_{n+1}} \right) = n(n+1)$ , care se obține pentru

$$a_k a_{k+1} = 1, \forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \Rightarrow a_k = 1, \forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n, n+1\} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Atunci } \sqrt{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n+1}} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1})^{-2} = 1 \cdot (n+1)^{-2} = \frac{1}{(n+1)^2} \dots\dots\dots 2p$$

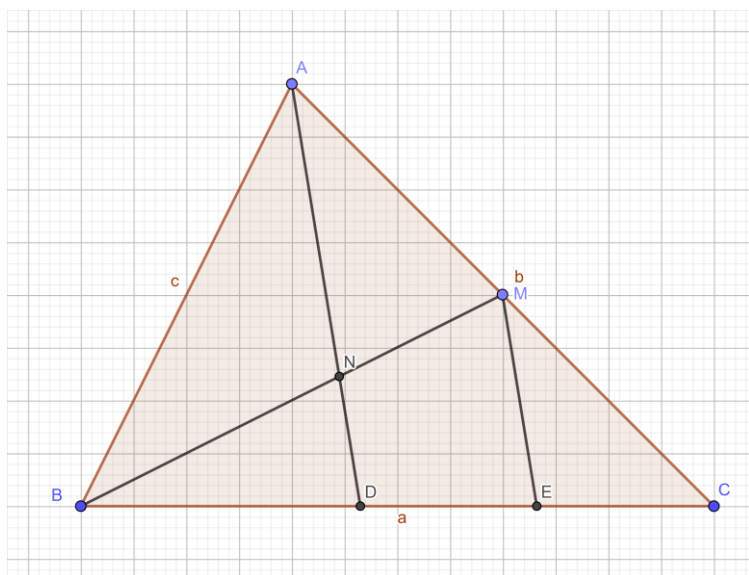
Oficiu.....1p

**Problema 3**

Fie  $\triangle ABC$  cu lungimile laturilor  $BC = a, AC = b, AB = c$  astfel încât  $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$ . Dacă  $[AD]$  este bisectoarea unghiului  $BAC$ ,  $D \in BC$ ,  $M$  este mijlocul laturii  $AC$  și  $ME \parallel AD, E \in BC$ , să se calculeze ce procent din aria triunghiului  $ABC$  reprezintă aria triunghiului  $MEC$ .

Mioara Tudor

**Soluție**



Cum  $[AD]$  este bisectoarea unghiului  $BAC$

$$\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{BD}{a} = \frac{c}{b+c} \Rightarrow BD = \frac{ac}{b+c}, CD = \frac{ab}{b+c} \dots\dots\dots 3p$$

$M$  este mijlocul segmentului  $AC, ME \parallel AD \Rightarrow E$  este mijlocul segmentului  $DC$  .....1p

$$\Rightarrow CE = \frac{DC}{2} = \frac{ab}{2(b+c)} \Rightarrow A_{\triangle MEC} = \frac{CE \cdot h}{2} = \frac{abh}{8(b+c)}, \text{ unde } h = d(A, BC) \dots\dots\dots 2p$$



$$BM \text{ mediană} \Rightarrow A_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} A_{\triangle ABC} = \frac{ah}{4} \Rightarrow A_{\triangle MEC} = \frac{b}{4(b+c)} \cdot A_{\triangle ABC} \dots\dots\dots 2p$$

Dacă  $\frac{b}{c} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{b}{b+c} = \frac{3}{5} \Rightarrow A_{\triangle MEC} = \frac{3}{20} \cdot A_{\triangle ABC} = \frac{15}{100} \cdot A_{\triangle ABC}$ , deci  $A_{\triangle MEC}$  reprezintă 15% din  $A_{\triangle ABC}$ .....1p

Oficiu.....1p



**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024**

**Clasa a VI-a**

**Problema 1.**

a) Știind că  $x, y, z \in \mathbb{Q}_+$  astfel încât  $\frac{2023}{1+\frac{y}{x}} + \frac{2024}{1+\frac{z}{y}} + \frac{2025}{1+\frac{x}{z}} = 2024$ , calculați

$$\frac{2022x-y}{x+y} + \frac{2023y-z}{y+z} + \frac{2024z-x}{z+x}.$$

b) Determinați cardinalul mulțimii

$$A = \left\{ \overline{ab} \in \mathbb{N} \mid \frac{9a+3b}{a+2b} \in \mathbb{N} \text{ și } \frac{2a+4b}{3a+b} \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Problema 2.**

Două numere naturale  $x$  și  $y$  verifică relația  $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$ , iar  $x^5 + y^5$  se divide cu  $x^2y^2$ .

Demonstrați că  $xy \geq 10^5$ .

**Problema 3.**

Fie  $\triangle ABC$  cu  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ . Bisectoarele interioare ale unghiurilor  $ABC$  și  $ACB$  intersectează laturile  $AC$  și  $AB$  în punctele  $N$  și respectiv  $M$ . Notăm cu  $P$  și  $Q$  picioarele perpendicularelor duse din  $M$  și  $N$  pe  $BC$ . Aflați măsura unghiului  $PAQ$ .

Gazeta Matematică

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Timp de lucru 3 ore.**

**Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.**



**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024**

**Clasa a VI-a  
Barem de evaluare și notare**

**Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.**

**Problema 1.**

a) Știind că  $x, y, z \in \mathbb{Q}_+$  astfel încât  $\frac{2023}{1 + \frac{y}{x}} + \frac{2024}{1 + \frac{z}{y}} + \frac{2025}{1 + \frac{x}{z}} = 2024$ , calculați

$$\frac{2022x - y}{x + y} + \frac{2023y - z}{y + z} + \frac{2024z - x}{z + x}$$

b) Determinați cardinalul mulțimii

$$A = \left\{ \overline{ab} \in \mathbb{N} \mid \frac{9a + 3b}{a + 2b} \in \mathbb{N} \text{ și } \frac{2a + 4b}{3a + b} \in \mathbb{N} \right\}$$

**Soluție:**

a)  $\frac{2023x}{x + y} + \frac{2024y}{y + z} + \frac{2025z}{z + x} = 2024$  ..... 1 p

$\frac{2023x}{x + y} - 1 + \frac{2024y}{y + z} - 1 + \frac{2025z}{z + x} - 1 = 2021$  ..... 2 p

$\frac{2022x - y}{x + y} + \frac{2023y - z}{y + z} + \frac{2024z - x}{z + x} = 2021$  ..... 1 p

b) Fie  $m = \frac{9a + 3b}{a + 2b}$  și  $n = \frac{2a + 4b}{3a + b}$   $m, n \in \mathbb{N}$  obținem  $m \cdot n = 6$  ..... 1 p

Cum  $m \cdot n = 6$  și  $m, n \in \mathbb{N}$  avem soluțiile

$\begin{cases} m = 6 \\ n = 1 \end{cases}, \begin{cases} m = 1 \\ n = 6 \end{cases}, \begin{cases} m = 3 \\ n = 2 \end{cases}, \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}$  ..... 1 p

de unde obținem  $A = \{12, 17, 24, 31, 36, 48, 62, 93\}$  și  $\text{card}A = 8$  ..... 3 p

Oficiu ..... 1 p



### Problema 2.

Două numere naturale  $x$  și  $y$  verifică relația  $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$ , iar  $x^5 + y^5$  se divide cu  $x^2y^2$ . Demonstrați că  $xy \geq 10^5$ .

#### Soluție:

Cum  $5x = 2y \Rightarrow x$  este par  $\Rightarrow x = 2k, k \in \mathbb{N}^*$ , iar  $y = 5k$  ..... 2p

$x^2y^2 = 100k^4$  și  $x^5 + y^5 = 3157k^5$  ..... 2p

$x^2y^2 | x^5 + y^5 \Rightarrow 100k^4 | 3157k^5 \Rightarrow 100 | 3157k$  ..... 1p

Cum 100 și 3157 sunt prime între ele  $\Rightarrow 100 | k \Rightarrow k = 100p, p \in \mathbb{N}^*$  ..... 2p

$xy = 10k^2 = 10 \cdot (100p)^2 = 10^5 p \Rightarrow xy \geq 10^5$  ..... 2p

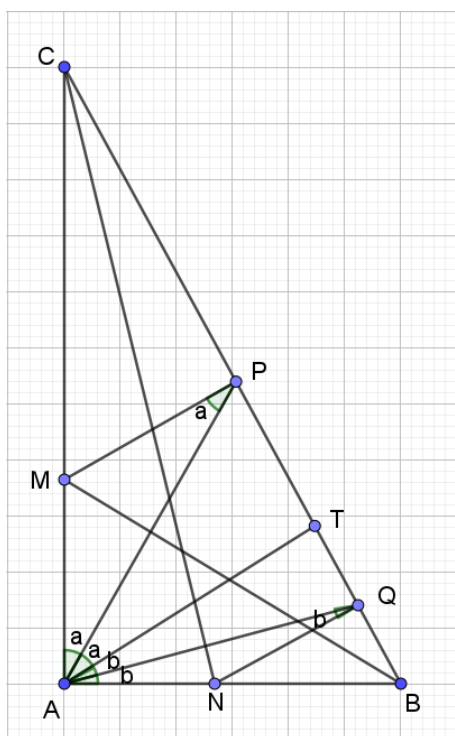
Oficiu..... 1p

### Problema 3.

Fie  $\triangle ABC$  cu  $\angle BAC = 90^\circ$ . Bisectoarele interioare ale unghiurilor  $ABC$  și  $ACB$  intersectează laturile  $AC$  și  $AB$  în punctele  $M$  și respectiv  $N$ . Notăm cu  $P$  și  $Q$  picioarele perpendicularelor duse din  $M$  și  $N$  pe  $BC$ . Aflați măsura unghiului  $PAQ$ .

Victor Felecan, G. M. 1/2024

#### Soluție





$BM$  bisectoarea  $\angle ABC \Rightarrow MA = MP \Rightarrow \triangle MAP$  isoscel  $\Rightarrow \angle MAP = \angle MPA = a$  ..... 2p

Fie  $AT \perp BC, T \in BC$ , cum  $MP \perp BC \Rightarrow MP \parallel AT \Rightarrow \angle MPA = \angle PAT = a$  (alterne interne)...2p

Analog  $\triangle ANQ$  isoscel  $\Rightarrow \angle QAN = \angle AQN = b$  ..... 2p

$AT \perp BC$  și  $NQ \perp BC \Rightarrow AT \parallel NQ \Rightarrow \angle AQN = \angle TAQ = b$  (alterne interne) .....2p

$\angle BAC = 2a + 2b \Rightarrow 90^\circ = 2a + 2b \Rightarrow a + b = 45^\circ \Rightarrow \angle PAQ = 45^\circ$  .....1p

Oficiu.....1p



**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA a XXVII-a, 23 martie 2024**

**Clasa a V-a**

**Problema 1**

Demonstrați că dacă numerele naturale  $x, y, z$  verifică egalitatea  $6x + 13y = 7z$ , atunci

$$(x + y)(y + z)(z + x) : 182.$$

**Problema 2**

Fie  $N = 1^4 + 2^4 \cdot 3^4 + 4^4 \cdot 5^4 \cdot 6^4 + \dots + 67^4 \cdot 68^4 \cdot \dots \cdot 78^4$ .

Să se determine ultimele 4 cifre ale numărului  $N$ .

**Problema 3**

Aflați numerele naturale  $x, y, z, t$ , dacă ele verifică relațiile:

$$x + 12y + 12z + 102t = x + 12y + 102z + 12t = xyzt = 2023.$$

Gazeta Matematică

**Toate subiectele sunt obligatorii.**

**Timp de lucru 3 ore.**

**Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.**



**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE MIHOC”  
EDIȚIA a XXVI-a, 23 martie 2024**

**Clasa a V-a**

**Barem de evaluare și notare**

**Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.**

**Problema 1**

*Demonstrați că dacă numerele naturale  $x, y, z$  verifică egalitatea  $6x + 13y = 7z$ , atunci*

$$(x + y)(y + z)(z + x) : 182 .$$

**Soluție**

$$6x + 13y = 7z \Rightarrow 13x + 13y = 7z + 7x \Rightarrow 13(x + y) = 7(x + z) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Cum } (7, 13) = 1 \Rightarrow (x + y) : 7 \text{ și } (x + z) : 13 \dots\dots\dots 2p$$

$$6x + 13y = 7z \Rightarrow 6x + 20y = 7y + 7z \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow 2(3x + 10y) = 7(z + y) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Cum } (2, 7) = 1 \Rightarrow (y + z) : 2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dar } 182 = 2 \cdot 13 \cdot 7 \Rightarrow (x + y)(y + z)(x + z) : 182 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Oficiu} \dots\dots\dots 1p$$

**Problema 2**

*Fie  $N = 1^4 + 2^4 \cdot 3^4 + 4^4 \cdot 5^4 \cdot 6^4 + \dots + 67^4 \cdot 68^4 \cdot \dots \cdot 78^4$ . Să se determine ultimele 4 cifre ale numărului  $N$ .*

*Burlacu Oana*

**Soluție**

$$\text{Se observă că } (4^4 \cdot 5^4 \cdot 6^4) : 10^4$$

$$(7^4 \cdot 8^4 \cdot 9^4 \cdot 10^4) : 10^4$$

$$\dots\dots\dots (67^4 \cdot 68^4 \cdot \dots \cdot 78^4) : 10^4 \dots\dots\dots 4p$$

$$\Rightarrow (N - (1^4 + 2^4 \cdot 3^4)) : 10^4 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Ultimele 4 cifre ale lui } N \text{ sunt } 1297 = 1^4 + 2^4 \cdot 3^4 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Oficiu} \dots\dots\dots 1p$$



### Problema 3

Aflați numerele naturale  $x, y, z, t$ , dacă ele verifică relațiile

$$x+12y+12z+102t = x+12y+102z+12t = xyz = 2023 .$$

George Florin Șerban, G. M. 1/2024

### Soluție

$$x+12y+12z+102t = x+12y+102z+12t \Rightarrow 90t = 90z$$

$$\Rightarrow t = z \dots\dots\dots 2p$$

$$xyz^2 = 2023$$

$$\text{Dar } 2023 = 7 \cdot 17^2 \Rightarrow z = 1 \text{ sau } z = 17 \dots\dots\dots 2p$$

Se observă că  $z = 1$  nu convine  $\dots\dots\dots 2p$

Pentru  $z = 17$  se obține  $x = 1$  și  $y = 7 \dots\dots\dots 3p$

Oficiu  $\dots\dots\dots 1p$