



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025

Clasa a XII-a

Problema 1

Determinați $\int_0^{\ln 2} \frac{xe^x}{e^{2x} - 2e^x + 2} dx$.

Gazeta Matematică

Problema 2

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m, n \geq 2$ și (G_1, \cdot) respectiv (G_2, \cdot) două grupuri ciclice cu m , respectiv n elemente. Dacă există un morfism injectiv $f: G_1 \rightarrow G_2$ astfel încât pentru orice $r \in \{1, 2, 3, \dots, m-1\}$, $f_r: G_1 \rightarrow G_2$, $f_r(x) = (f(x))^r$ este funcție injectivă, atunci să se arate că:

- $\text{Im} f = \{f(x) | x \in G_1\}$ este subgrup al lui (G_2, \cdot) și n se divide prin m ;
- m este număr prim.

Problema 3

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât $\int_a^b f(x) dx = 0$.

a) Arătați că $\int_a^b e^{f(x)} dx \geq b - a$.

b) Arătați că există $c \in (a, b)$ astfel încât $2 \int_a^c f(x) dx = (a + b - 2c) f(c)$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025
Clasa a XII-a

Bareme de evaluare și notare

Problema 1

Determinați $\int_0^{\ln 2} \frac{xe^x}{e^{2x} - 2e^x + 2} dx$.

Aurel Doboșan, Lugoj, G.M. 1/2025

Soluție.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{xe^x}{e^{2x} - e^x + 2}$ și $I = \int_0^{\ln 2} \frac{xe^x}{e^{2x} - 2e^x + 2} dx = \int_0^{\ln 2} f(x) dx$.

Cu schimbarea de variabilă $t = \ln 2 - x$, avem $dx = -dt$, $x = 0 \Rightarrow t = \ln 2$, $x = \ln 2 \Rightarrow t = 0$ și atunci avem $I = \int_{\ln 2}^0 f(\ln 2 - t)(-dt) = \int_0^{\ln 2} f(\ln 2 - t) dt$ 3p

Avem $f(\ln 2 - t) = \frac{(\ln 2 - t)e^{\ln 2 - t}}{e^{2(\ln 2 - t)} - e^{\ln 2 - t} + 2}$ și cum $e^{\ln 2 - t} = \frac{e^{\ln 2}}{e^t} = \frac{2}{e^t}$, atunci

$$f(\ln 2 - t) = \frac{(\ln 2 - t) \frac{2}{e^t}}{\frac{4}{e^{2t}} - \frac{2}{e^t} + 2} = \frac{(\ln 2 - t)e^t}{e^{2t} - 2e^t + 2} = \frac{e^t \ln 2}{e^{2t} - 2e^t + 2} - f(t)$$
 3p

Avem $I = \int_0^{\ln 2} f(\ln 2 - t) dt = \ln 2 \int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{e^{2t} - 2e^t + 2} dt - I$ și deci

$$I = \frac{\ln 2}{2} \int_0^{\ln 2} \frac{(e^t - 1)'}{(e^t - 1)^2 + 1} dt = \frac{\ln 2}{2} \cdot \arctg(e^t - 1) \Big|_0^{\ln 2} = \frac{\ln 2}{2} \cdot \arctg 1 = \frac{\pi \ln 2}{8}$$
 3p

Oficiu 1p

Problema 2

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m, n \geq 2$ și (G_1, \cdot) respectiv (G_2, \cdot) două grupuri ciclice cu m , respectiv n elemente. Dacă există un morfism injectiv $f: G_1 \rightarrow G_2$ astfel încât pentru orice $r \in \{1, 2, 3, \dots, m-1\}$,

$f_r: G_1 \rightarrow G_2$, $f_r(x) = (f(x))^r$ este funcție injectivă, atunci să se arate că:

- a) $Imf = \{f(x) | x \in G_1\}$ este subgrup al lui (G_2, \cdot) și n se divide prin m ;
- b) m este număr prim.

Marin Ionescu, Pitești



Soluție.

a) Cum $f : G_1 \rightarrow G_2$ este morfism de grupuri atunci $f(e_1) = e_2$ și $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$, $x \in G_1$, unde e_1 și e_2 sunt elementele neutre ale celor două grupuri.

Arătăm că $\text{Im } f = \{f(x) | x \in G_1\}$ este subgrup al lui G_2 . Fie $u, v \in \text{Im } f$, deci există $x, y \in G_1$ astfel încât $u = f(x)$ și $v = f(y)$. Avem $uv = f(x)f(y) = f(xy) \in \text{Im } f$ și

$u^{-1} = (f(x))^{-1} = f(x^{-1}) \in \text{Im } f$, ceea ce înseamnă că $\text{Im } f = \{f(x) | x \in G_1\}$ este subgrup al lui (G_2, \cdot) 2p

Cum f este morfism injectiv atunci $|\text{Im } f| = |G_1| = m$. Din teorema Lagrange rezultă că $\text{ord}(\text{Im } f) | \text{ord } G_2$, adică $m | n$ 2p

b) Arătăm în continuare că m este număr prim. Presupunem prin absurd că m nu este prim, deci există p număr prim astfel încât $p | m$. Deoarece G_1 este grup ciclic cu m elemente, există

$x \in G \setminus \{e_1\}$ astfel încât $G_1 = \{e_1, x, x^2, \dots, x^{m-1}\}$ și $x^m = e_1$, unde e_1 este elementul neutru al grupului G_1 . Fie $y = f(x)$. Cum f este morfism injectiv atunci

$\text{Im } f = \{f(e_1), f(x), f(x^2), \dots, f(x^{m-1})\} = \{e_2, y, y^2, \dots, y^{m-1}\} \subset G_2$ 2p

Din ipoteză funcția $f_p : G_1 \rightarrow G_2$, $f_p(a) = (f(a))^p$ este injectivă.

Demonstrăm că f_p este morfism. Deoarece orice grup ciclic este comutativ, avem

$f_p(ab) = (f(ab))^p = (f(a)f(b))^p = (f(a))^p (f(b))^p = f_p(a)f_p(b)$, $\forall a, b \in G_1$. Cum f_p este morfism, avem $f_p(a) = (f(a))^p = f(a^p)$, $\forall a \in G_1$.

Din p număr prim și $p | m$ rezultă (teorema Cauchy) că există $a \in G_1 \setminus \{e_1\}$ astfel încât $\text{orda} = p$.

Deci $a \neq e_1$ și $a^p = e_1$. Din (1) rezultă $f_p(a) = f(a^p) = f(e_1)$. Așadar $a \neq e_1$ și $f_p(a) = f_p(e_1)$.

Ceea ce înseamnă că funcția f_p nu este injectivă, deci contradicție cu f_p injectivă. Așadar presupunerea este falsă și prin urmare m este număr prim. 3p

Oficiu 1p

Problema 3

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât $\int_a^b f(x) dx = 0$.

a) Arătați că $\int_a^b e^{f(x)} dx \geq b - a$.

b) Arătați că există $c \in (a, b)$ astfel încât $2 \int_a^c f(x) dx = (a + b - 2c) f(c)$.



Soluție.

a) Folosind inegalitatea $e^x \geq 1+x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$\int_a^b e^{f(x)} dx \geq \int_a^b (1+f(x)) dx = \int_a^b dx + \int_a^b f(x) dx = b-a \dots\dots\dots 3p$$

b) Considerăm funcția $g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x-a) \int_a^x f(t) dt + (b-x) \int_x^b f(t) dt$ care verifică condițiile teoremei lui Rolle. Rezultă că există $c \in (a,b)$ astfel încât $g'(c) = 0$. Avem

$$g'(x) = \int_a^x f(t) dt + (x-a)f(x) - \int_x^b f(t) dt - (b-x)f(x). \text{ Din } g'(c) = 0, \text{ obținem}$$

$$\int_a^c f(t) dt - \int_c^b f(t) dt = (a+b-2c)f(c) \dots\dots\dots 4p$$

$$\text{Cum } \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt = 0, \text{ obținem } 2 \int_a^c f(t) dt = (a+b-2c)f(c) \dots\dots\dots 2p$$

Oficiu 1p

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025

Clasa a XI-a

Problema 1

Se consideră șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$, pentru orice $n \geq 1$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n^2} \right)^{\sqrt{x_n}}$.

Gazeta Matematică

Problema 2

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\frac{k}{k+1} \right)^2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, este monoton și mărginit.

b) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (nx_n^2 - (n-1)x_{n-1}^2)$.

Problema 3

Fie matricea $A \in M_3(\mathbb{C})$ astfel încât $(A^*)^2 \neq O_3$, unde A^* reprezintă matricea adjuncată a lui A . Arătați că $\text{rang}(A^k) = \text{rang}(A)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025
Clasa a XI-a

Bareme de evaluare și notare

Problema 1

Se consideră șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$,
pentru orice $n \geq 1$. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n^2} \right)^{\sqrt{x_n}}$.

Petru Tudor, Sebeș, G.M. 1/2025

Soluție.

Avem $x_2 = 1$ și evident $x_n > 0$, pentru orice $n \geq 1$ 1p
 Relația din enunț se mai scrie $\sqrt{x_{n+1}} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, pentru orice $n \geq 1$. Scriem această
 relație pentru $n-1$ și avem $\sqrt{x_n} = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$, $n \geq 2$. Din cele două relații avem
 $\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n} = x_n$, adică $\sqrt{x_{n+1}} = \sqrt{x_n} + x_n$, $\forall n \geq 2$. Imediat $\sqrt{x_{n+1}} > \sqrt{x_n}$, $\forall n \geq 2$, deci șirul
 $(x_n)_{n \geq 2}$ este strict crescător. 2p
 Demonstrăm că șirul $(x_n)_{n \geq 2}$ este nemărginit superior. Presupunem că șirul este mărginit
 superior și cum el este crescător și $x_n \geq x_2 = 1$ rezultă că el este convergent, deci șirul are limita
 finită: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l > 1$. Trecând la limită în relația $\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n} = x_n$, obținem $l = 0$ ceea ce este
 o contradicție. Așadar șirul este nemărginit și cum este strict crescător, el are limită și
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 3p
 Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n^2} \right)^{\sqrt{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x_{n+1}}}{x_n} \right)^{2\sqrt{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n + \sqrt{x_n}}{x_n} \right)^{2\sqrt{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right)^{2\sqrt{x_n}} = e^2$.
 3p
 Oficiu 1p

Problema 2

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\frac{k}{k+1} \right)^2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, este monoton și mărginit.

b) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (nx_n^2 - (n-1)x_{n-1}^2)$.

Nicolae Papacu, Slobozia



Soluție.

a) Evident $x_n \geq 0$. Deoarece $0 \leq \frac{k}{k+1} \leq 1$, avem $\sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$ și atunci $x_n \leq 1$. Prin urmare $x_n \in [0, 1]$, pentru orice $n \geq 1$ 1p

Studiem monotonia șirului $(y_n)_{n \geq 1}$ unde $y_n = x_n^2$. Avem

$$y_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 + \frac{1}{(n+1)^2} (2n+1) \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \text{ și atunci}$$

$$y_{n+1} - y_n = \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) \sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 + \frac{1}{(n+1)^2} (2n+1) \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2. \text{ Deoarece}$$

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \text{ avem}$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 - \left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right).$$

$$\text{Cum } \frac{n+1}{n+2} > \frac{k}{k+1}, k = \overline{1, n}, \text{ atunci } y_{n+1} - y_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 - \left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right) > 0,$$

adică șirul este crescător (strict), deci și șirul x_n este crescător. 3p

b) Pentru șirul $y_n = \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1) \left(\frac{k}{k+1}\right)^2}{n^2} = \frac{a_n}{n^2}$, folosind lema Stolz – Cesaro, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1)^2 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2}{2n+1} = 1, \text{ deci } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1. \text{ 2p}$$

$$\text{Avem } n^2 x_n^2 - (n-1)^2 x_{n-1}^2 = (2n-1) \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \text{ sau } n x_n^2 - \frac{n(n-1) - (n-1)}{n} x_{n-1}^2 = \frac{2n-1}{n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2,$$

$$\text{de unde } n x_n^2 - (n-1) x_{n-1}^2 = -\frac{n-1}{n} x_{n-1}^2 + \frac{2n-1}{n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \text{ și atunci}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n x_n^2 - (n-1) x_{n-1}^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n-1}{n} x_{n-1}^2 + \frac{2n-1}{n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right) = -1 + 2 = 1. \text{ 3p}$$

Oficiu 1p

Problema 3

Fie matricea $A \in M_3(\mathbb{C})$ astfel încât $(A^*)^2 \neq O_3$, unde A^* reprezintă matricea adjuncată a lui

A . Arătați că $\text{rang}(A^k) = \text{rang}(A)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.



Soluție.

Evident $\text{rang}A > 1$, altfel $A^* = O_3$ și atunci $(A^*)^2 = O_3$ în contradicție cu ipoteza. 1p

Cazul 1.

$\text{rang}A = 3$, adică $\det A \neq 0$ și atunci $\det A^k = \det^k A \neq 0$, deci $\text{rang}A^k = 3 = \text{rang}A$ 1p

Cazul 2.

$\text{rang}A = 2$, deci $\det A = 0$. Din inegalitatea lui Sylvester avem

$\text{rang}(A \cdot A^*) \geq \text{rang}A + \text{rang}A^* - 3$ și din $A \cdot A^* = \det A \cdot I_3 = O_3$ obținem $\text{rang}A^* \leq 1$, dar

$A^* \neq O_3$, deci $\text{rang}A^* = 1$

..... 2p

Lemă. Dacă $D \in M_n(\mathbb{C})$ și $\text{rang}D = 1$ atunci $D^2 = \text{tr}D \cdot D$.

Demonstrație. Se cunoaște că dacă $D = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ și $\text{rang}D = 1$ atunci există $b_k, c_k \in \mathbb{C}$,

$k = \overline{1, n}$ astfel încât $a_{ij} = b_i \cdot c_j$, $i, j = \overline{1, n}$. Notând $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $C = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$, avem

$D = BC$. Atunci $D^2 = BCBC$ și cum $CB = \left(\sum_{k=1}^n b_k c_k \right) = \text{tr}D$, avem $D^2 = \text{tr}D \cdot BC = \text{tr}D \cdot D$.

Folosind lema din $\text{rang}A^* = 1$, rezultă $(A^*)^2 = \text{tr}A^* \cdot A^*$ și prin urmare $\text{tr}A^* \neq 0$. Imediat prin

inducție $(A^*)^k = (\text{tr}A^*)^{k-1} \cdot A^* \neq O_3$ pentru orice $k \geq 2$ 2p

Conform inegalității lui Sylvester avem $\text{rang}A^2 = \text{rang}(A \cdot A) \geq \text{rang}A + \text{rang}A - 3 = 1$, iar

$\det A^2 = 0$, deci $\text{rang}A^2 \in \{1, 2\}$. Dacă $\text{rang}A^2 = 1$ avem $(A^2)^* = O_3$, deci $(A^*)^2 = (A^2)^* = O_3$

, ceea ce este o contradicție. Așadar $\text{rang}A^2 = 2 = \text{rang}A$ 2p

Presupunem acum că $\text{rang}A^k = 2$ și demonstrăm că $\text{rang}A^{k+1} = 2$, unde $k \geq 2$ este arbitrar

ales. Procedând analog ca mai înainte, obținem $\text{rang}A^{k+1} \in \{1, 2\}$, iar presupunând că

$\text{rang}A^{k+1} = 1$, am avea $(A^*)^{k+1} = (A^{k+1})^* = O_3$, fals.

Prin urmare $\text{rang}A^k = 2 = \text{rang}A$ 1p

Oficiu 1p

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025

Clasa a X-a

Problema 1

Determinați numerele complexe z și w știind că sunt verificate egalitățile

$$|z|^2 + z \cdot w + \bar{w} = 1 + 2i \text{ și } |w|^2 + \bar{z} \cdot \bar{w} + z = -i.$$

Gazeta Matematică

Problema 2

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2 - 1) - \lg(4x^2 + 9x + 5) = x^2 + 3x + 2$.

Problema 3

Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$.

a) Determinați numerele naturale n pentru care $f(n) = 4$.

b) Determinați imaginea funcției f .

($\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului real x)

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025
Clasa a X-a

Bareme de evaluare și notare

Problema 1.

Determinați umerele complexe z și w știind că sunt verificate egalitățile
 $|z|^2 + z \cdot w + \bar{w} = 1 + 2i$ și $|w|^2 + \bar{z} \cdot \bar{w} + z = -i$.

Lucian Tuțescu, Craiova, GM 12/2024

Soluție.

Avem relațiile

$$z \cdot \bar{z} + z \cdot w + \bar{w} = 1 + 2i \quad (1)$$

$$w \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot \bar{w} + z = -i \quad (2)$$

Adunând relațiile (1) și (2), obținem $z(\bar{z} + w) + \bar{w} + \bar{w}(\bar{z} + w) + z = 1 + i$ sau

$(\bar{z} + w)(z + \bar{w}) + \bar{w} + z = 1 + i$. Notăm $\alpha = \bar{z} + w$ și atunci ultima relație devine $\alpha \cdot \bar{\alpha} + \bar{\alpha} = 1 + i$.

Fie $\alpha = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, obținem sistemul $\begin{cases} a^2 + b^2 + a = 1 \\ -b = 1 \end{cases}$ care are soluțiile $(0, -1)$, $(-1, -1)$,

deci $\alpha = -i$ sau $\alpha = -1 - i$ 3p

Scăzând relațiile (1) și (2), avem $z \cdot \bar{z} + z \cdot w + \bar{w} - w \cdot \bar{w} - \bar{z} \cdot \bar{w} - z = 1 + 3i$ sau

$z(\bar{z} + w) + \bar{w} - \bar{w}(w + \bar{z}) - z = 1 + 3i$, adică $(\bar{z} + w)(z - \bar{w}) + \bar{w} - z = 1 + 3i$, de unde

$(\bar{z} + w - 1)(z - \bar{w}) = 1 + 3i$. Notând $\beta = z - \bar{w}$, avem $\beta(\alpha - 1) = 1 + 3i$, adică $\beta = \frac{1 + 3i}{\alpha - 1}$.

.....2p

Cazul 1. $\alpha = -i$, atunci $\beta = \frac{1 + 3i}{1 - i} = -2 - i$. Și atunci avem $\begin{cases} \bar{z} + w = -i \\ z - \bar{w} = -2 - i \end{cases}$, sistem care are

soluția $(z, w) = (-1, 1 - i)$ 2p

Cazul 2. $\alpha = -1 - i$, atunci $\beta = \frac{1 + 3i}{-2 - i} = -1 - i$. Avem sistemul $\begin{cases} \bar{z} + w = -1 - i \\ z - \bar{w} = -1 - i \end{cases}$, sistem care are

soluția $(z, w) = (-1, -i)$ 2p

Oficiu 1p

Problema 2.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2 - 1) - \lg(4x^2 + 9x + 5) = x^2 + 3x + 2$.

Ionel Tudor, Călugăreni



Soluție.

Condițiile de existență ale logaritmilor sunt $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 4x^2 + 9x + 5 > 0 \end{cases}$, de unde

$$x \in D = \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup (1, \infty). \dots\dots\dots 3p$$

Cum $4x^2 + 9x + 5 - (x^2 - 1) = 3(x^2 + 3x + 2)$, adică $x^2 + 3x + 2 = \frac{4x^2 + 9x + 5}{3} - \frac{x^2 - 1}{3}$,

ecuația se mai scrie sub forma $\lg(x^2 - 1) + \frac{x^2 - 1}{3} = \lg(4x^2 + 9x + 5) + \frac{4x^2 + 9x + 5}{3}$.

Considerând funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lg x + \frac{x}{3}$, atunci avem ecuația

$$f(x^2 - 1) = f(4x^2 + 9x + 5) \quad (1)$$

..... 2p

Funcția f fiind suma a două funcții strict crescătoare, este strict crescătoare, deci este injectivă.

..... 2p

Atunci din (1) obținem $x^2 - 1 = 4x^2 + 9x + 5$, adică $3x^2 + 9x + 6 = 0$. Avem $x_1 = -2 \in D$ și $x_2 = -1 \notin D$.

Deci $S = \{-2\}$ este mulțimea soluțiilor reale ale ecuației din enunț. 2p

Oficiu 1p

Problema 3.

Fie funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = \lceil \sqrt{n} \rceil + \lceil \sqrt[3]{n} \rceil$.

a) Determinați numerele naturale n pentru care $f(n) = 4$.

b) Determinați imaginea funcției f .

($\lceil x \rceil$ reprezintă partea întreagă a numărului real x)

Marcel Popescu, Slobozia

Soluție.

a) Evident $f(n) = 0 \Leftrightarrow n = 0$. Pentru $n \geq 1$, cum $\lceil \sqrt{n} \rceil, \lceil \sqrt[3]{n} \rceil \in \mathbb{N}$ și $\lceil \sqrt{n} \rceil \geq \lceil \sqrt[3]{n} \rceil$, avem

posibilitățile: $\begin{cases} \lceil \sqrt{n} \rceil = 3 \\ \lceil \sqrt[3]{n} \rceil = 1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} \lceil \sqrt{n} \rceil = 2 \\ \lceil \sqrt[3]{n} \rceil = 2 \end{cases}$ 1p

Din $\begin{cases} \lceil \sqrt{n} \rceil = 3 \\ \lceil \sqrt[3]{n} \rceil = 1 \end{cases}$ rezultă $\begin{cases} n \in [3^2, 4^2) \cap \mathbb{N} \\ n \in [1^3, 2^3) \cap \mathbb{N} \end{cases}$ sistem care nu are soluții. Din $\begin{cases} \lceil \sqrt{n} \rceil = 2 \\ \lceil \sqrt[3]{n} \rceil = 2 \end{cases}$ rezultă

$\begin{cases} n \in [2^2, 3^2) \cap \mathbb{N} \\ n \in [2^3, 3^3) \cap \mathbb{N} \end{cases}$ sistem care are soluția $n = 8$ 2p



b) Evident funcția f este crescătoare și $f(0) = 0$.

Vom determina numerele naturale care nu sunt valori ale lui f , adică numerele $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $f(n) \neq k, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $n \in \mathbb{N}$ fie $[\sqrt{n}] = a \in \mathbb{N}$ și $[\sqrt[3]{n}] = b \in \mathbb{N}$. Avem $f(n) = a + b$.

$$\text{Avem } \begin{cases} [\sqrt{n}] = a \\ [\sqrt[3]{n}] = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \leq n < (a+1)^2 \\ b^3 \leq n < (b+1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 < n+1 \leq (a+1)^2 \\ b^3 < n+1 \leq (b+1)^3 \end{cases} \text{ și atunci } [\sqrt{n+1}] \in \{a, a+1\},$$

$$[\sqrt[3]{n+1}] \in \{b, b+1\}. \dots\dots\dots$$

2p

Avem $f(n+1) = [\sqrt{n+1}] + [\sqrt[3]{n+1}] \in \{a+b, a+b+1, a+b+2\}$. Pentru $f(n+1) = a+b+2$, $a+b+1 \notin \text{Im } f$ 1p

$$f(n+1) = a+b+2 \Leftrightarrow \begin{cases} [\sqrt{n+1}] = a+1 \\ [\sqrt[3]{n+1}] = b+1 \end{cases}, \text{ Cum } \begin{cases} a^2 < n+1 \leq (a+1)^2 \\ b^3 < n+1 \leq (b+1)^3 \end{cases}, \text{ rezultă } \begin{cases} n+1 = (a+1)^2 \\ n+1 = (b+1)^3 \end{cases}.$$

Cum $n+1 \geq 1$ Atunci există $c \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a+1 = c^3$, $b+1 = c^2$ și $n+1 = c^6$. Deci $f(c^6 - 1) = c^3 - 1 + c^2 - 1 = c^3 + c^2 - 2$ și $f(c^6) = c^3 + c^2$ și prin urmare $f(n) \neq c^3 + c^2 - 1$,

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $c \in \mathbb{N}^*$. Așadar $\text{Im } f = \mathbb{N} \setminus \{c^3 + c^2 - 1 \mid c \in \mathbb{N}^*\}$ 3p

Oficiu 1p

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025

Clasa a IX-a

Problema 1

Pentru un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ se notează cu $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați șirurile de numere naturale nenule $(a_n)_{n \geq 1}$ pentru care $\frac{2a_1}{S_1 S_2} + \frac{2a_2}{S_2 S_3} + \dots + \frac{2a_n}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{n+1}}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $S_p = 2025$.

Problema 2

Fie triunghiul ABC și D mijlocul laturii (BC) . Fie $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ astfel încât $AM = CN = x$. Notăm cu $\{P\} = MN \cap AD$ și cu $\{Q\} = BN \cap AD$.

- a) Arătați că $\frac{QB}{QN} - \frac{PM}{PN} = 1$ dacă și numai dacă $AB = AC$.
- b) Dacă $AB = AC = 1$ și P este mijlocul lui (AQ) , determinați x .

Gazeta Matematică

Problema 3

Se consideră numerele reale $a, b, c \in (0, \infty)$. Arătați că este adevărată inegalitatea

$$\frac{3a+1}{\sqrt{b+c}} + \frac{3b+1}{\sqrt{c+a}} + \frac{3c+1}{\sqrt{a+b}} \geq 6.$$

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



**CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025
Clasa a IX-a**

Bareme de evaluare și notare

Problema 1

Pentru un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ se notează cu $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați șirurile de numere naturale nenule $(a_n)_{n \geq 1}$ pentru care $\frac{2a_1}{S_1 S_2} + \frac{2a_2}{S_2 S_3} + \dots + \frac{2a_n}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{n+1}}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $S_p = 2025$.

Ionel Tudor, Călugăreni, Nicolae Papacu, Slobozia

Soluție.

Avem relația $\sum_{k=1}^n \frac{2a_k}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{n+1}}$ (1)

In (1) facem $n = 1$ și obținem $\frac{2a_1}{S_1 S_2} = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2}$, de unde $a_2 = 2a_1$ 1p

Pentru $n \geq 2$, scriem (1) pentru $n-1$ și obținem $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2a_k}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_n}$ (2). Din (1) și (2), prin

scădere, obținem $\frac{2a_n}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}$, de unde $S_{n+1} - S_n = 2a_n$, adică $a_{n+1} = 2a_n$, $n \geq 2$. Deci

$a_{n+1} = 2a_n$, $n \geq 1$, ceea ce înseamnă că șirul a_n este o progresie geometrică cu rația $q = 2$ și prin urmare $a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 4p

Determinăm acum a_1 : Avem $S_p = a_1 \frac{2^p - 1}{2 - 1} = a_1 (2^p - 1)$. Pentru $S_p = 2025$, avem

$a_1 (2^p - 1) = 2025 = 45^2 = 3^4 \cdot 5^2$. Din $(2^p - 1) \mid 3^4 \cdot 5^2$, rezultă că $2^p - 1 = 3^n \cdot 5^q$, unde $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ și $q \in \{0, 1, 2\}$ 1p

Pentru $q = 0$, avem $2^p = 1 + 3^n \in \{2, 4, 10, 28, 82\}$ și deci $p \in \{1, 2\}$ și imediat $a_1 = 2025$ sau $a_1 = \frac{2025}{3} = 675$ 1p

Pentru $q \geq 1$, avem că $5 \mid 2^p - 1$. Avem $2^4 = 16 = M_5 + 1$ și mediat $2^{4k} = M_5 + 1$,

$2^{4k+1} = M_5 + 2$, $2^{4k+2} = M_5 + 4$, $2^{4k+3} = M_5 + 3$. Atunci $5 \mid 2^p - 1$ pentru $p = 4k$. Dar

$2^{11} = 2048 > 2025$ și atunci $p \in \{4, 8\}$. Dacă $p = 4$, $2^4 - 1 = 15$, deci $a_1 = \frac{2025}{15} = 135$, iar

pentru $p = 8$, avem $2^8 - 1 = 15 \cdot 17$, dar în acest caz $a_1 \notin \mathbb{N}$. În concluzie șirurile căutate sunt

$a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$ cu $a_1 \in \{135, 675, 2025\}$ 2p

Oficiu 1p

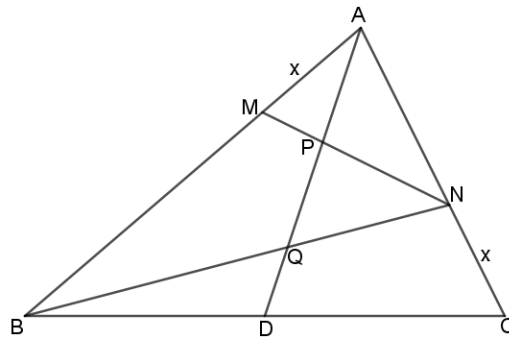
Problema 2

Fie triunghiul ABC și D mijlocul laturii (BC) . Fie $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ astfel încât $AM = CN = x$. Notăm cu $\{P\} = MN \cap AD$ și cu $\{Q\} = BN \cap AD$.

a) Arătați că $\frac{QB}{QN} - \frac{PM}{PN} = 1$ dacă și numai dacă $AB = AC$.

b) Dacă $AB = AC = 1$ și P este mijlocul lui (AQ) , determinați x .

Adrian Bud, Negrești Oaș, G.M. 1/2025

Soluție.


a) $\left\{ \begin{array}{l} \Delta BNC \\ A-Q-D \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Menelaus}} \frac{BQ}{QN} \cdot \frac{NA}{AC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$ și de aici $\frac{BQ}{QN} = \frac{AC}{NA} = \frac{AC}{AC-x}$ 1p

$\left\{ \begin{array}{l} \Delta BMN \\ A-P-Q \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Menelaus}} \frac{MP}{PN} \cdot \frac{NQ}{QB} \cdot \frac{BA}{AM} = 1$ și de aici $\frac{MP}{PN} = \frac{QB}{QN} \cdot \frac{AM}{AB} = \frac{xAC}{AB(AC-x)}$ 1p

Avem $\frac{QB}{QN} - \frac{PM}{PN} = \frac{AC}{AC-x} \left(1 - \frac{x}{AB} \right) = \frac{AC(AB-x)}{AB(AC-x)}$. Atunci

$\frac{QB}{QN} - \frac{PM}{PN} = 1 \Leftrightarrow AC(AB-x) = AB(AC-x) \Leftrightarrow AB = AC$ 2p

b) Cum $\frac{MP}{PN} = \frac{xAC}{AB(AC-x)} = \frac{x}{1-x}$ avem $\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AM} + \frac{x}{1-x} \overrightarrow{AN}}{1 + \frac{x}{1-x}}$. Deoarece $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ și

$\overrightarrow{AN} = (1-x)\overrightarrow{AC}$, avem $\overrightarrow{AP} = x(1-x)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ 2p

Cum $\frac{BQ}{QN} = \frac{AC}{AC-x} = \frac{1}{1-x}$, avem $\overrightarrow{AQ} = \frac{\overrightarrow{AB} + \frac{1}{1-x} \overrightarrow{AN}}{1 + \frac{1}{1-x}} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{1 + \frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{2-x} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ 1p

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AQ} \Rightarrow x = \frac{1}{2(2-x)}$ de unde $2x^2 - 4x + 1 = 0$, adică $x \in \left\{ \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \right\}$. Dar $x \in (0,1)$ și

atunci $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 2p

Oficiu 1p



Problema 3

Se consideră numerele reale $a, b, c \in (0, \infty)$. Arătați că este adevărată inegalitatea

$$\frac{3a+1}{\sqrt{b+c}} + \frac{3b+1}{\sqrt{c+a}} + \frac{3c+1}{\sqrt{a+b}} \geq 6.$$

Nicolae Papacu, Slobozia

Soluție.

Folosind inegalitatea mediilor, avem $\sqrt{b} = \sqrt{1 \cdot b} \leq \frac{1+b}{2}$ și atunci $\frac{3a+1}{\sqrt{b+c}} \geq \frac{6a+2}{1+b+2c}$. Avem

$$\sum \frac{3a+1}{\sqrt{b+c}} \geq \sum \frac{6a+2}{1+b+2c} \quad (1) \dots\dots\dots 3p$$

Vom demonstra inegalitatea $\sum \frac{6a+2}{1+b+2c} \geq 6$ (2)

Folosim în rezolvare inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz (variantea Bergström:

$$\left(\sum (\sqrt{x})^2 \right) \left(\sum \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right)^2 \right) \geq \left(\sum \sqrt{x} \cdot \frac{a}{\sqrt{x}} \right)^2, \text{ adică } \sum \frac{a^2}{x} \geq \frac{(\sum a)^2}{\sum x}.$$

Avem

$$E = \sum \frac{6a+2}{1+b+2c} = 6 \sum \frac{a}{1+b+2c} + 2 \sum \frac{1}{1+b+2c} = 6 \sum \frac{a^2}{a+ab+2ac} + 2 \sum \frac{1^2}{1+b+2c}$$

$$\text{inegalitatea Bergström, avem } E \geq 6 \frac{(\sum a)^2}{\sum a + 3 \sum ab} + 2 \frac{3^2}{3 + 3 \sum a} \dots\dots\dots 3p$$

De asemenea din inegalitatea cunoscută $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, obținem $3 \sum ab \leq (\sum a)^2$.

Notând $S = \sum a$, avem

$$E \geq 6 \frac{(\sum a)^2}{\sum a + 3 \sum ab} + 2 \frac{3^2}{3 + 3 \sum a} \geq 6 \frac{S^2}{S + S^2} + 2 \frac{3^2}{3 + 3S} = \frac{6S}{1+S} + \frac{6}{1+S} = 6.$$

Din (1) și (2) rezultă inegalitatea din enunț. 3p

Oficiu 1p

Soluție alternativă pentru inegalitatea (2)

Notăm $1+b+2c = x$, $1+c+2a = y$, $1+a+2b = z$, de unde $3+3(a+b+c) = x+y+z$, adică

$$a+b+c = \frac{x+y+z}{3} - 1. \text{ De asemenea } x-y = b+c-2a, \text{ adică } b+c = x-y+2a \text{ și atunci}$$

$$a+x-y+2a = \frac{x+y+z}{3} - 1, \text{ de unde } 3(3a+1) = -2x+4y+z, \text{ sau } 3a+1 = \frac{-2x+4y+z}{3},$$

$$\text{Atunci } \frac{6a+2}{1+b+2c} = \frac{2}{3} \frac{4y+z-2x}{x} = \frac{8y}{3x} + \frac{2z}{3x} - \frac{4}{3} \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Avem } \sum \frac{6a+2}{1+b+2c} = \frac{8}{3} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) - 4. \text{ Cum } \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} \geq 3 \text{ și } \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3,$$

$$\text{obținem } \sum \frac{6a+2}{1+b+2c} \geq 8+2-4 = 6. \dots\dots\dots 3p$$

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025

Clasa a VIII-a

Problema 1

- a) Să se determine numerele naturale x și y cu proprietățile $\sqrt{x+\sqrt{y}} \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{y+\sqrt{x}} \in \mathbb{N}$.
- b) Să se determine valoarea maximă și valoarea minimă a sumei $x + y + z$ știind că x, y, z sunt numere reale care îndeplinesc simultan condițiile

$$x^2 + yz \leq 2, \quad y^2 + xz \leq 2, \quad z^2 + xy \leq 2.$$

Problema 2

- a) Fie a și b două numere naturale nenule. Notăm

$$x = \frac{2a^2b}{a^3 + b^3}, \quad y = \frac{2ab^2}{a^3 + b^3} \quad \text{și} \quad z = x^{2025} + y^{2025}.$$

Să se calculeze z știind că x și y sunt numere naturale.

- b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 5.$$

Problema 3

Fie $ABCD$ un pătrat cu centrul O . Pe latura CD se consideră un punct X și notăm cu F intersecția dreptelor AC și BX . Din F se ridică perpendiculara SF pe planul (ABC) . Dacă $CX^2 = 2 \cdot OF^2$ arătați că planele (SBD) și (SBC) fac cu planul (ABC) unghiuri cu aceeași măsură.

Gazeta Matematică

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025
Clasa a VIII-a

Bareme de evaluare și notare

Problema 1

- a) Să se determine numerele naturale x și y cu proprietățile $\sqrt{x+\sqrt{y}} \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{y+\sqrt{x}} \in \mathbb{N}$.
b) Să se determine valoarea maximă și valoarea minimă a sumei $x + y + z$ știind că x, y, z sunt numere reale care îndeplinesc simultan condițiile

$$x^2 + yz \leq 2, \quad y^2 + xz \leq 2, \quad z^2 + xy \leq 2.$$

Soluție.

a) Dacă $y = 0$ atunci $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{\sqrt{x}} \in \mathbb{N} \Rightarrow x = n^4, n \in \mathbb{N}$1p

Dacă $x = 0$ atunci $\sqrt{y} \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{\sqrt{y}} \in \mathbb{N} \Rightarrow y = m^4, m \in \mathbb{N}$1p

Dacă $x \neq 0$ și $y \neq 0$ atunci

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } x + \sqrt{y} = a^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = a^2 - x \in \mathbb{N}^*$$

$$\sqrt{y+\sqrt{x}} \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{N}^* \text{ astfel încât } y + \sqrt{x} = b^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = b^2 - y \in \mathbb{N}^*$$

Rezultă că există $p, q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $y = p^2$ și $x = q^2 \Rightarrow p = a^2 - x$ și $q = b^2 - y$2p

Vom avea $p + q^2 = a^2$ și $p^2 + q = b^2$.

Cum $p, q \in \mathbb{N}^* \Rightarrow p \neq 0, p + q^2 = \text{pătrat perfect}, p + q^2 > q^2 \Rightarrow p + q^2 \geq (q+1)^2$ și analog

$$p^2 + q \geq (p+1)^2 \Leftrightarrow p \geq 2q+1 \text{ și } q \geq 2p+1.$$

Adunând aceste două relații rezultă $p + q + 2 \leq 0$ ceea ce este fals și rezultă că x și y nu pot fi simultan nenule.....2p

b) Adunăm cele trei inegalități și rezultă

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz \leq 6 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3xy + 3yz + 3xz \leq 18$$
.....1p

Adunăm ultima inegalitate cu inegalitatea cunoscută $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$

și rezultă $2(x + y + z)^2 \leq 18$ și apoi $|x + y + z| \leq 3 \Leftrightarrow x + y + z \in [-3, 3]$1p

Dacă $x = y = z = -1$ atunci $x + y + z = -3$

Dacă $x = y = z = 1$ atunci $x + y + z = 3$1p

Oficiu.....1p

Problema 2

a) Fie a și b două numere naturale nenule. Notăm

$$x = \frac{2a^2b}{a^3 + b^3}, \quad y = \frac{2ab^2}{a^3 + b^3} \text{ și } z = x^{2025} + y^{2025}.$$

Să se calculeze z știind că x și y sunt numere naturale.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 5.$$

Soluție.

a) $a, b \in \mathbb{N}^*, x, y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x \geq 1$ și $y \geq 1 \Rightarrow x + y \geq 2$

.....1p

$$\frac{2a^2b + 2ab^2}{a^3 + b^3} \geq 2 \Rightarrow \frac{2ab(a+b)}{(a+b)(a^2 - ab + b^2)} \geq 2 \Rightarrow \frac{ab}{a^2 - ab + b^2} \geq 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$a^2 - ab + b^2 > 0 \Rightarrow ab \geq a^2 - ab + b^2 \Rightarrow 0 \geq (a-b)^2 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b \dots\dots\dots 1p$$

$$x = y = 1 \Rightarrow z = 2 \dots\dots\dots 1p$$

b) $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1) = 5 \Leftrightarrow (12x-1)(12x-2)(12x-3)(12x-4) = 120$

Notez $12x = a \Rightarrow (a-1)(a-2)(a-3)(a-4) = 120 \dots\dots\dots 1p$

$$(a^2 - 5a + 4)(a^2 - 5a + 6) = 120 \dots\dots\dots 1p$$

Notez $a^2 - 5a + 4 = t \Rightarrow t(t+2) = 120 \Rightarrow (t+1)^2 = 121 \Rightarrow t = 10$ sau $t = -12 \dots\dots\dots 1p$

Dacă $t = 10 \Rightarrow a^2 - 5a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ sau $a = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{12} \dots\dots\dots 1p$

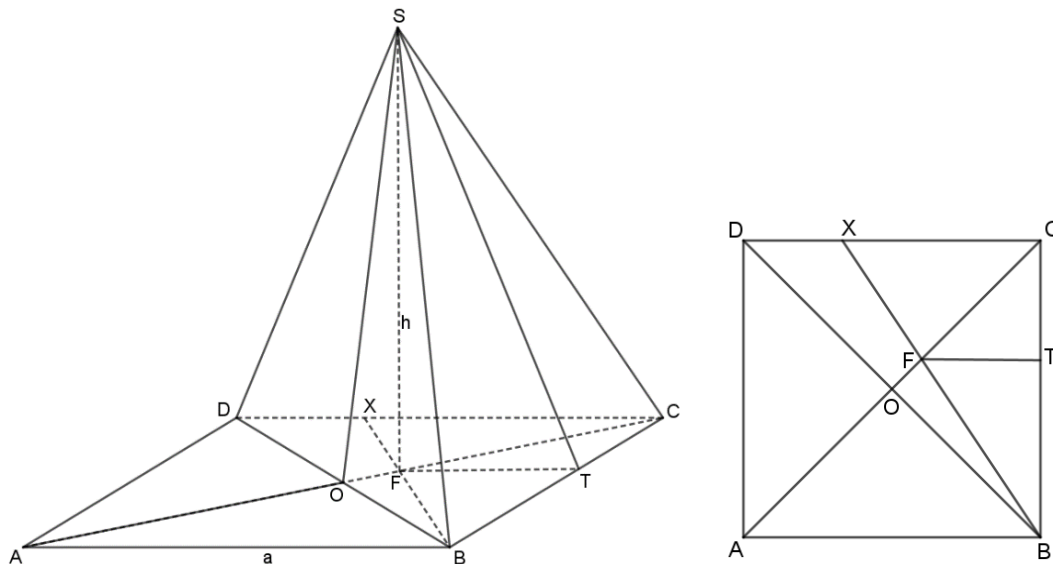
Dacă $t = -12 \Rightarrow a^2 - 5a + 16 = 0 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții reale.....1p

Oficiu.....1p

Problema 3

Fie $ABCD$ un pătrat cu centrul O . Pe latura CD se consideră un punct X și notăm cu F intersecția dreptelor AC și BX . Din F se ridică perpendiculara SF pe planul (ABC) . Dacă $CX^2 = 2 \cdot OF^2$, arătați că planele (SBD) și (SBC) fac cu planul (ABC) unghiuri cu aceeași măsură.

Mihaela Berindeanu, București, G.M. nr.1/2025





Soluție.

$$\sphericalangle((SBD), (ABC)) = \sphericalangle SOF \dots\dots\dots 2p$$

Construiesc $FT \perp BC, T \in BC$

$$\sphericalangle((SBC), (ABC)) = \sphericalangle STF \dots\dots\dots 2p$$

$$\triangle DCO, X - F - B \text{ transversală} \xRightarrow{T. Menelaus} \frac{DX}{CX} \cdot \frac{CF}{OF} \cdot \frac{OB}{DB} = 1$$

$$\text{Dacă notez } AB = a \text{ atunci } \frac{OB}{DB} = \frac{1}{2} \text{ și } \frac{DX}{CX} \cdot \frac{CF}{OF} = 2 \dots\dots\dots 1p$$

$$CX^2 = 2 \cdot OF^2 \Rightarrow CX = \sqrt{2} \cdot OF, DX = a - CX, CF = \frac{a\sqrt{2}}{2} - OF$$

$$\frac{a - CX}{CX} \cdot \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} - OF}{OF} = 2 \Rightarrow \left(\frac{a}{CX} - 1\right) \left(\frac{a\sqrt{2}}{2OF} - 1\right) = 2 \Rightarrow \left(\frac{a}{OF\sqrt{2}} - 1\right) \left(\frac{a}{OF\sqrt{2}} - 1\right) = 2$$

$$\frac{a}{OF\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} \Rightarrow OF = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}}$$

$$CF = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}} = a(\sqrt{2} - 1) \dots\dots\dots 2p$$

$$FT \parallel AB \Rightarrow \triangle CFT \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{FT}{AB} = \frac{CF}{CA} = \frac{CT}{CB} \Rightarrow \frac{FT}{a} = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{a\sqrt{2}} \Rightarrow FT = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}} \dots\dots\dots 1p$$

Cum $OF = FT \Rightarrow$ triunghiurile dreptunghice SFO și SFT sunt congruente

$$\Rightarrow \sphericalangle SOF = \sphericalangle STF \dots\dots\dots 1p$$

Oficiu..... 1p

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025

Clasa a VII-a

Problema 1

- a) Verificați dacă există numere naturale x pentru care numărul $N = \sqrt{x^2 + 39} + 2025$ este natural și pătrat perfect.
- b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $[2024x] + \{2025x\} = 2025$.

Problema 2

Calculați:

$$S_n = \sqrt{11-2} + \sqrt{1111-22} + \sqrt{111111-222} + \dots + \sqrt{\underbrace{111\dots1}_{2n \text{ cifre}} - \underbrace{222\dots2}_n}, \text{ pentru } n \in \mathbb{N}^*$$

Problema 3

Se consideră rombul $ABCD$ cu $AC > BD$ și pătratul $ABEF$, astfel încât punctul D să fie în interiorul pătratului.

- a) Determinați măsura unghiului ACE .
- b) Dacă $AC = 2BD$, arătați că $A_{ABCD} = 4A_{ECDF}$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025
Clasa a VII-a

Bareme de evaluare și notare

Problema 1

- a) Verificați dacă există numere naturale x pentru care numărul $N = \sqrt{x^2 + 39} + 2025$ este natural și pătrat perfect.
- b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $[2024x] + \{2025x\} = 2025$.

Soluție.

a) Fie $\sqrt{x^2 + 39} = k, k > 0, k \in \mathbb{N}$

Prin ridicare la pătrat se obține $x^2 + 39 = k^2 \Leftrightarrow k^2 - x^2 = 39 \Leftrightarrow (k - x)(k + x) = 39$ 1p

Cum $k, x \in \mathbb{N}$ se obține $x = 19$, sau $x = 5$1p

Pentru $x = 19$ se obține $N = 2045$

Pentru $x = 5$ se obține $N = 2033$ 1p

Niciunul din cele două numere nu este pătrat perfect deci nu există numere naturale x 1p

b) Cum $[2024x]$ și 2025 sunt numere întregi $\{2025x\} = 0$ și $[2024x] = 2025$ 1p

$[2024x] = 2025 \Rightarrow 2024x \in [2025, 2026)$ 1p

Fie $2024x = 2025 + a, a \in [0, 1)$ se obține $x = \frac{2025 + a}{2024} = 1 + \frac{1 + a}{2024}$ 1p

Cum $\{2025x\} = 0$ avem

$\left\{2025 + \frac{2025(1 + a)}{2024}\right\} = 0 \Leftrightarrow \left\{2026 + \frac{1 + 2025a}{2024}\right\} = 0 \Rightarrow \left\{\frac{1 + 2025a}{2024}\right\} = 0$ 1p

Dar $\frac{1 + 2025a}{2024} \in \mathbb{N}$ și $a \in [0, 1) \Rightarrow \frac{1}{2025} \leq \frac{1 + 2025a}{2024} < \frac{2026}{2025} \Rightarrow \frac{1 + 2025a}{2024} = 1$

$\Rightarrow 1 + 2025a = 2024 \Rightarrow a = \frac{2023}{2025}$ și $x = \frac{2027}{2025}$ 1p

Oficiu.....1p



Problema 2

Calculați:

$$S_n = \sqrt{11-2} + \sqrt{1111-22} + \sqrt{111111-222} + \dots + \sqrt{\underbrace{111\dots1}_{2n \text{ cifre}} - \underbrace{222\dots2}_n}, \text{ pentru } n \in \mathbb{N}^*$$

George Florin Șerban, Brăila, G. M. nr.11/2024

Soluție.

Un termen oarecare este de forma :

$$T_k = \sqrt{\underbrace{111\dots1}_{2k \text{ cifre}} - \underbrace{222\dots2}_k} = \sqrt{\underbrace{111\dots1}_k \cdot 10^k + \underbrace{111\dots1}_k - 2 \cdot \underbrace{111\dots1}_k} = \sqrt{\underbrace{111\dots1}_k \cdot (10^k - 1)} = \sqrt{\underbrace{111\dots1}_k \cdot \underbrace{999\dots9}_k} = 3 \cdot \underbrace{111\dots1}_k = \underbrace{333\dots3}_k \dots\dots\dots 4p$$

$$S_n = 3 + 33 + \dots + \underbrace{333\dots3}_n = \frac{9 + 99 + \dots + \overline{999\dots9}}{3} = \frac{10 + 10^2 + \dots + 10^n - n}{3} \dots\dots\dots 3p$$

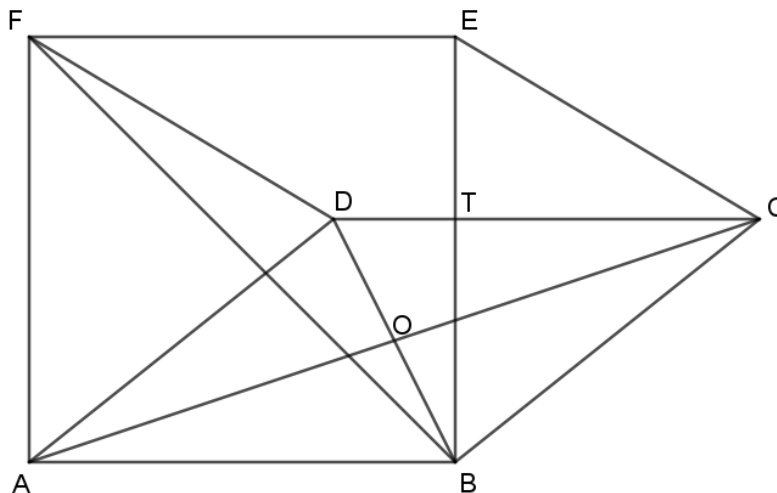
De unde se obține $S_n = \frac{10(10^n - 1) - 9n}{27} \dots\dots\dots 2p$

Oficiu..... 1p

Problema 3

Se consideră rombul $ABCD$ cu $AC > BD$ și pătratul $ABEF$, astfel încât punctul D să fie în interiorul pătratului.

- a) Determinați măsura unghiului ACE .
- b) Dacă $AC = 2BD$, arătați că $A_{ABCD} = 4A_{ECDF}$.





Soluție.

a) Fie $\sphericalangle BAD = 2x \Rightarrow \sphericalangle DAF = 90^\circ - 2x$.

$$\triangle ADF \text{ isoscel} \Rightarrow \sphericalangle DFA = \sphericalangle ADF = \frac{180^\circ - 90^\circ + 2x}{2} = 45^\circ + x \dots\dots\dots 1p$$

$$\sphericalangle DFE = 90^\circ - \sphericalangle AFD = 90^\circ - 45^\circ - x = 45^\circ - x \dots\dots\dots 1p$$

Cum $DC \parallel AB$ și $AB \parallel EF \Rightarrow DC \parallel FE$, $DC = AB$ și $AB = EF \Rightarrow DC = FE \Rightarrow DCEF$

paralelogram $\Rightarrow \sphericalangle DCE = \sphericalangle DFE = 45^\circ - x$, dar $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAD = x \Rightarrow \sphericalangle ACE = 45^\circ \dots\dots\dots 2p$

b) Fie $DC \cap BE = \{T\}$. Cum $BE \perp AB$ și $AB \parallel CD \Rightarrow BE \perp CD \dots\dots\dots 1p$

$$AC = 2BD \Rightarrow OC = 2OD$$

$$\triangle OCD, O = 90^\circ \xrightarrow{T.P} CD = OD\sqrt{5} \dots\dots\dots 1p$$

$$\sphericalangle O = \sphericalangle T = 90^\circ \text{ și } \sphericalangle D = \text{unghi comun} \xrightarrow{U.U.} \triangle DOC \sim \triangle DTB \Rightarrow \frac{CO}{BT} = \frac{CD}{BD} \Leftrightarrow \frac{2OD}{BT} = \frac{OD\sqrt{5}}{2OD}$$

$$\Rightarrow BT = \frac{4OD}{\sqrt{5}} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dar } BE = CD = OD\sqrt{5} \Rightarrow TE = BE - BT = \frac{OD\sqrt{5}}{5} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Obținem } A_{ABCD} = CD \cdot BT = 4OD^2 \text{ și } A_{DCEF} = CD \cdot ET = OD^2 \Rightarrow A_{ABCD} = 4A_{ECDF} \dots\dots\dots 1p$$

Oficiu..... 1p

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025

Clasa a VI-a

Problema 1

Să se determine numerele prime p și q pentru care $p(p-1)(p+1) = 8q(6q^2+1)$.

Problema 2

Aflați numerele naturale nenule a și b pentru care

$$\frac{a}{(a,b)} = b + \frac{48 \cdot (a,b)}{[a,b]} \text{ și } \frac{b}{(a,b)} = a - \frac{312 \cdot (a,b)}{[a,b]}.$$

Am notat cu (a,b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b , iar cu $[a,b]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b .

Gazeta Matematică

Problema 3

Fie $\triangle ABC$ și punctul D aflat pe dreapta BC de aceeași parte a lui C ca punctul B , astfel încât $CD \equiv AB$. Dacă E este punctul de intersecție dintre bisectoarea unghiului ABC și mediatoarea laturii BC , iar punctul F este simetricul punctului E față de dreapta BC , să se arate că $AE \equiv DF$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025
Clasa a VI-a

Bareme de evaluare și notare

Problema 1

Să se determine numerele prime p și q pentru care $p(p-1)(p+1) = 8q(6q^2 + 1)$.

Soluție.

Cum $p(p-1)(p+1) = (p-1) \cdot p \cdot (p+1) : 3$, ca produs de trei numere naturale consecutive...3p

Atunci $8q(6q^2 + 1)$ este multiplu de 3, iar 8 și $6q^2 + 1$ nu sunt multipli de 3, deci $q = 3$3p

Se obține $(p-1) \cdot p \cdot (p+1) = 8 \cdot 3 \cdot 55 = 10 \cdot 11 \cdot 12$ și deci $p = 11$, care este prim.....3p

Oficiu 1p

Problema 2.

Aflați numerele naturale nenule a și b pentru care

$$\frac{a}{(a,b)} = b + \frac{48 \cdot (a,b)}{[a,b]} \text{ și } \frac{b}{(a,b)} = a - \frac{312 \cdot (a,b)}{[a,b]}.$$

Am notat cu (a,b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b , iar cu $[a,b]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b .

Gazeta Matematică 12/2024

Soluție.

Dacă notăm $(a,b) = d, d \in \mathbb{N}^*$, atunci $a = d \cdot m, b = d \cdot n, [a,b] = d \cdot m \cdot n$, unde

$m, n \in \mathbb{N}^*, (m,n) = 1$ 1p

Atunci relațiile din enunț devin $m = d \cdot n + \frac{48}{m \cdot n}$ și $n = d \cdot m - \frac{312}{m \cdot n}$ 2p

Înmulțind prima relație cu n și pe a doua cu m și scăzându-le, se obține după prelucrare

$$d \cdot (m^2 - n^2) = \frac{312}{n} + \frac{48}{m} \text{2p}$$

De aici, $m > n, 48 : m, 312 : n$, deci $m \in D_{48}, n \in D_{312}, 48 = 2^4 \cdot 3, 312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$ 2p



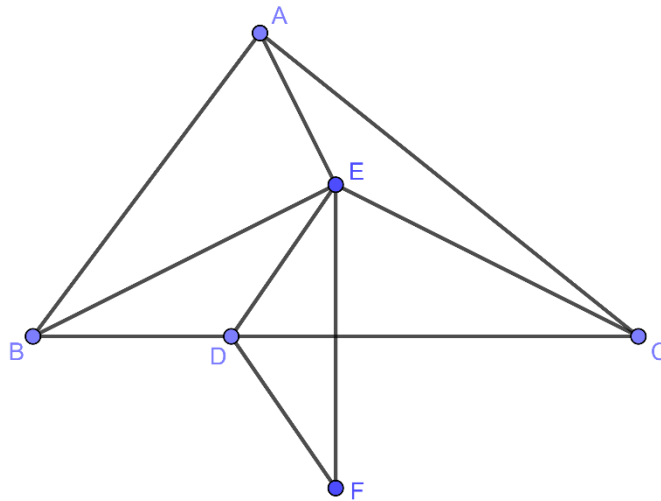
Ținând cont de condițiile precedente și de $(m, n) = 1$, singura variantă convenabilă este
 $m = 8, n = 3 \Rightarrow d = 2$ și $a = 16, b = 6$ 2p

Oficiu 1p

Problema 3.

Fie $\triangle ABC$ și punctul D aflat pe dreapta BC de aceeași parte a lui C ca punctul B , astfel încât $CD \equiv AB$. Dacă E este punctul de intersecție dintre bisectoarea unghiului ABC și mediatoarea laturii BC , iar punctul F este simetricul punctului E față de dreapta BC , să se arate că $AE \equiv DF$.

Soluție.



Cum BE este bisectoarea unghiului $ABC \Rightarrow ABE \equiv EBC$ 1p

E se află pe mediatoarea segmentului $BC \Rightarrow BE \equiv CE \Rightarrow \triangle EBC$ este isoscel $\Rightarrow EBC \equiv ECB$,
deci $ABE \equiv ECB$ și cum $AB \equiv CD$, $\Rightarrow \triangle ABE \equiv \triangle DCE \Rightarrow AE \equiv DE$ 4p
(L.U.L.)

Dar F este simetricul lui E față de $BC \Rightarrow BC$ este mediatoarea segmentului EF și $D \in BC$,
deci $DE \equiv DF$ 3p

În concluzie, $AE \equiv DF$ 1p

Oficiu 1p

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025

Clasa a V-a

Problema 1

Fie n număr natural nenul.

- Suma cifrelor unui număr natural cu n cifre este 159. Poate fi acest număr pătrat perfect?
- Se consideră n numere naturale consecutive. Suma resturilor împărțirii celor n numere la 11 este 166. Aflați toate valorile posibile ale lui n .

Problema 2

- Arătați că numărul 141 poate fi scris ca suma dintre un pătrat perfect și un cub perfect.
- Arătați că există numere naturale a și b astfel încât $a^2 + b^3 = 141^{2023}$.

Gazeta Matematică

Problema 3

Verificați dacă există numerele naturale a și b pentru care $15 \cdot a^2 + 4 \cdot b^2 = 7^{2025}$.

Toate subiectele sunt obligatorii.
Țimp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXVIII-a, 10 mai 2025
Clasa a V-a

Bareme de evaluare și notare

Problema 1.

Fie n număr natural nenul.

a) *Suma cifrelor unui număr natural cu n cifre este 159. Poate fi acest număr pătrat perfect?*

b) *Se consideră n numere naturale consecutive. Suma resturilor împărțirii celor n numere la 11 este 166. Aflați toate valorile posibile ale lui n .*

Soluție.

a) Fie a numărul natural cu n cifre.

Cum $159:3 \Rightarrow a:3$ 1p

Dar 159 nu este divizibil cu 9 $\Rightarrow a$ nu este divizibil cu 9 1p

$\Rightarrow a$ nu poate fi pătrat perfect..... 1p

b) Fie r restul la împărțirea prin 11

$0 \leq r < 11 \Rightarrow r \in \{0,1,2, \dots, 10\}$ 1p

Numerele sunt consecutive \Rightarrow resturile sunt consecutive și $0+1+2+\dots+10=55$ 1p

Variantele convenabile sunt:

$(0+1+2+\dots+10)+(0+1+2+\dots+10)+(0+1+2+\dots+10)+0+1=$

$(1+2+\dots+10+0)+(1+2+\dots+10+0)+(1+2+\dots+10+0)+1$ 2p

\Rightarrow sunt 34 sau 35 numere $\Rightarrow n \in \{34,35\}$ 2p

Oficiu 1p

Problema 2.

a) *Arătați că numărul 141 poate fi scris ca suma dintre un pătrat perfect și un cub perfect.*

b) *Arătați că există numere naturale a și b astfel încât $a^2 + b^3 = 141^{2023}$.*

Ionela Turturean, Satu Mare, G. M. 1/2025

Soluție.

a) $141 = 16 + 125 = 4^2 + 5^3$ 1p

b) $a^2 + b^3 = 141^{2022} \cdot 141$ 1p

$a^2 + b^3 = 141^{2022} \cdot (16 + 125) = 141^{2022} \cdot 16 + 141^{2022} \cdot 125$ 4p

De aici $a^2 + b^3 = (141^{1011} \cdot 4)^2 + (141^{674} \cdot 5)^3$ 2p



$\Rightarrow a = 141^{1011} \cdot 4$ și $b = 141^{674} \cdot 5$1p

Oficiu 1p

Problema 3.

Verificați dacă există numerele naturale a și b pentru care $15 \cdot a^2 + 4 \cdot b^2 = 7^{2025}$.

Soluție.

Cum $u(7^{2025}) = 7 \Rightarrow u(15 \cdot a^2 + 4 \cdot b^2) = 7$2p

$4 \cdot b^2$ este par $\Rightarrow 15 \cdot a^2$ este impar $\Rightarrow a^2$ este impar3p

$\Rightarrow u(a^2)$ poate fi 1,5 sau 9 $\Rightarrow u(15a^2) = 5 \Rightarrow u(4 \cdot b^2) = 2$ 2p

dar $4b^2$ este pătrat perfect

\Rightarrow nu există numere naturale care să îndeplinească condiția dată.....2p

Oficiu 1p

Pentru orice soluție corectă diferită de cea din barem, se acordă punctaj maxim.