



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a XII-a

Problema 1

Fie șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ definite prin termenul general $a_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \arcsin(nx) dx$ și
respectiv $b_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \arctg(nx) dx$.

a) Arătați că $a_n \leq 2b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Problema 2

Determinați funcțiile continue $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\int_0^x f(t) dt = \int_{x^2}^1 f(t) dt$,
pentru orice $x \in [0,1]$.

Gazeta Matematică

Problema 3

Se consideră inelul claselor de resturi $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a) Dacă n este număr prim, arătați că $(x+y)^n = x^n + y^n$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}_n$.

b) Dacă $(x+y)^n = x^n + y^n$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}_n$, arătați că n este liber de pătrate.

c) Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}_n^*$ astfel încât $b = ac$ și mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z}_n \mid ax = \hat{0}\}$ și

$B = \{x \in \mathbb{Z}_n \mid ax = b\}$. Arătați că A și B au același număr de elemente

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a XI-a

Problema 1

Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir dat de $x_0 = 1$ și $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}x_n^2$, pentru orice $n \geq 0$.

Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$.

Gazeta Matematică

Problema 2

Fie matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^{2026} = A^2$. Arătați că matricea $I_2 - A + A^2$ este inversabilă.

Problema 3

Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, cu $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $b \in \mathbb{R}$, g continuă cu $g\left(\frac{b}{1-a}\right) = 0$ și care pentru orice $x \in \mathbb{R}$ verifică relațiile:

$g(x) \leq (g \circ f)(x) + f(x) - \frac{b}{1-a}$, $g(x) \leq (g \circ f^{-1})(x) - x + \frac{b}{1-a}$, unde f^{-1} este inversa funcției f .

a) Pentru $b = 0$, arătați că $g(x) = \frac{ax}{1-a}$.

b) Pentru $a \in (-1, 1)$ determinați funcția g .

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a X-a

Problema 1

Se consideră numărul complex $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ și funcțiile $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = z - \varepsilon$ și $\varepsilon f(z) + f(\varepsilon z) = g^2(z)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

- a) Dacă $|g(z)| < 1$ și $|g(z^2)| < 1$, arătați că $|z| < \frac{3}{2}$.
- b) Determinați funcția f .

Problema 2

Determinați soluțiile reale ale sistemului
$$\begin{cases} 2^{x^2} + 2^{1-y} = 3 \\ 2^{y^2} + 2^{1-x} = 3 \end{cases}.$$

Gazeta Matematică

Problema 3

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale strict crescător cu $a_1 > 0$ care are proprietatea că $a_n + a_{n+2} \leq 2a_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Dacă $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ și toți termenii șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ sunt numere naturale, determinați șirul $(a_n)_{n \geq 1}$.

b) Dacă $p \geq 2$ este număr natural, calculați

$$\left[\frac{\sqrt[p]{a_1} + \sqrt[p]{a_3}}{\sqrt[p]{a_2}} + \frac{\sqrt[p]{a_2} + \sqrt[p]{a_4}}{\sqrt[p]{a_3}} + \frac{\sqrt[p]{a_3} + \sqrt[p]{a_5}}{\sqrt[p]{a_4}} + \dots + \frac{\sqrt[p]{a_n} + \sqrt[p]{a_{n+2}}}{\sqrt[p]{a_{n+1}}} \right], n \in \mathbb{N}^*.$$

($[a]$ reprezintă partea întregă a numărului real a)

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a IX-a

Problema 1

Fie funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definită prin $f(n) = \left[\frac{n}{2} \right]$.

- a) Dacă șirul de numere naturale $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică astfel încât șirul $(f(a_n))_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică, atunci arătați că toți termenii șirului $(a_n)_{n \geq 1}$ au aceeași paritate.
- b) Determinați numerele naturale nenule m, n, p știind că $f(n^3) = p^m$ și p este prim.
- c) Determinați funcțiile $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ care pentru orice $n \in \mathbb{N}$ verifică relațiile $g(n) \leq f(n)$,

$$g(n+1) > g(n) - \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a)

Problema 2

Fie triunghiul ABC și $D \in (BC)$ astfel încât $BC = 3 \cdot BD$. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și M simetricul lui I față de D . Știind că $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, arătați că ABC este echilateral.

Gazeta Matematică

Problema 3

Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ cu $a + b + c = 1$. Demonstrați inegalitatea $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} + 18abc \leq 1$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a VIII-a

Problema 1

- a) Demonstrați că dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și m și n sunt numere naturale cu aceeași paritate, atunci

$$\frac{a^m + b^m}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} \leq \frac{a^{m+n} + b^{m+n}}{2}.$$

- b) Demonstrați că $\frac{a^{100} + b^{100}}{2} \geq \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^{50}$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 2.

Fie a, b, c numere reale nenule, distincte două câte două și d un număr real. Să se demonstreze că ecuațiile $ax^2 + (b+d)x + c = 0$, $bx^2 + (c+d)x + a = 0$, $cx^2 + (a+d)x + b = 0$ au o soluție comună dacă și numai dacă $a + b + c + d = 0$.

Problema 3.

Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub și M, N, P, Q mijloacele muchiilor BC, AD, CC' , respectiv DD' . Notăm $AM \cap BD = \{E\}$, $CN \cap BD = \{F\}$, $DP \cap CD' = \{E'\}$, $C'Q \cap CD' = \{F'\}$.

- a) Demonstrați că $EE' = FF'$ și $EE' \parallel (AC'Q)$.
b) Determinați sinusul unghiului format de dreptele EE' și FF' .
c) Fie G centrul de greutate al triunghiului ABD . Demonstrați că $EE' \parallel (GFF')$.

Gazeta Matematică

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a VII-a

Problema 1

Pentru orice număr natural nenul k , demonstrați că numărul $\sqrt{1 + \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4k^2}}$ este rațional.

Prelucrare Gazeta Matematică

Problema 2.

a) Demonstrați că

$$\frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + \frac{4^2+1}{4^2-1} + \dots + \frac{2026^2+1}{2026^2-1} > 2026.$$

b) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea:

$$\left[\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2+2n+2} \right] + \left[\sqrt{n^2+4n+3} + \sqrt{n^2+4n+5} \right] + \dots + \left[\sqrt{4n^2-1} + \sqrt{4n^2+1} \right] \geq 6n-3.$$

S-a notat cu $[a]$, partea întreagă a numărului real a .

Problema 3.

Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC și cercul circumscris acestuia. Semidreapta AI este bisectoarea unghiului BAC , $I \in BC$. AI intersectează cercul a doua oară în punctul E . Tangentele la cerc în punctele E și C se intersectează în punctul F iar AE și CF se intersectează în punctul N .

a) Demonstrați că $\frac{1}{CN} + \frac{1}{CI} = \frac{1}{CF}$.

b) Dacă punctul M este mijlocul laturii BC și $K \in AC$ astfel încât $MK \parallel AI$, atunci să se demonstreze că $2AK = AC - AB$.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a VI-a

Problema 1

Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$, (a, b) = cel mai mare divizor comun al numerelor a, b și $[a, b]$ = cel mai mic multiplu comun al numerelor a, b .

- Se știe că $(a, b) + [a, b] = 100$. Determinați toate perechile (a, b) pentru care unul dintre numere îl divide pe celălalt.
- Demonstrați că $(a, b)^2 + [a, b]^2 \geq a^2 + b^2$.

Problema 2.

Pe bilele dintr-o urnă sunt scrise numerele naturale cuprinse între 2^{10} și 2^{11} . Se extrage o bilă. Aflați probabilitatea ca numărul scris pe aceasta să aibă trei divizori.

Gazeta Matematică

Problema 3.

Pe o dreaptă d se consideră punctele O, M_1, M_2, \dots, M_n în această ordine. Fie punctul P exterior dreptei d astfel încât măsura unghiului $\sphericalangle POM_1$ este egală cu 120° iar măsurile unghiurilor $\sphericalangle OPM_1, \sphericalangle OPM_2, \dots, \sphericalangle OPM_n$, respectiv măsurile unghiurilor $\sphericalangle PM_1O, \sphericalangle PM_2O, \dots, \sphericalangle PM_nO$ sunt numere prime diferite (exprimate în grade).

- Aflați valoarea maximă a lui n .
- Dacă n are valoare maximă, arătați că oricum am alege patru dintre unghiurile $\sphericalangle M_1PM_2, \sphericalangle M_2PM_3, \dots, \sphericalangle M_{n-1}PM_n$, există printre ele două congruente.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.



CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE MIHOC”
EDIȚIA a XXIX-a, 21 martie 2026

Clasa a V-a

Problema 1.

Să se determine restul împărțirii lui N prin n în cazurile:

- a) $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1020 + 1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10}$ și $n = 2026$;
b) $N = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2026}$ și $n = 63$.

Problema 2.

Să se compare numerele:

- a) $a = 3^{22} + 3^{21}$ și $b = 5^{14} + 2^{33}$;
b) $m = 5^{13}$ și $n = 3^{21} - 2^{31}$.

Problema 3.

Fie numărul $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{2n-1} a_{2n}}$ cu $2n$ cifre nenule. Se știe că orice cifră a numărului situată pe poziție pară este de patru ori mai mare decât precedenta de pe poziția impară (adică este îndeplinită condiția $a_{2k} = 4 \cdot a_{2k-1}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$, $k \leq n$).

- a) Demonstrați că nu există astfel de numere cu suma cifrelor 2026.
b) Determinați cel mai mic și cel mai mare astfel de număr cu suma cifrelor 2025.

Gazeta Matematică

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.